ISSN 2177-9139

XX EREMAT - Encontro Regional de Estudantes de Matemática da Região Sul
Fundação Universidade Federal do Pampa (UNIPAMPA), Bagé/RS, Brasil. 13-16 nov. 2014.

TEORIA DOS NÚMEROS NATURAIS

Maicon Luiz Collovini Salatti - luizcollovini@gmail.com
Universidade Federal de Pelotas, Polo de Arroio dos Ratos, 96740-000 - Arroio dos Ratos, RS, Brasil.
Luis Felipe Kiesow de Macedo - felipekiesow@gmail.com
Universidade Federal de Pelotas, Campus Capão do Leão, 96160-000 - Pelotas, RS, Brasil.

Resumo. *Este minicurso consiste em realizar a primeira parte da construção teórica do Conjunto dos Números Naturais a partir dos chamados Axiomas de Peano. Destaca-se a demonstração do teorema da recursão, que é exibida neste minicurso e que é utilizada em partes fundamentais na demonstração de outros dois teoremas, onde um deles demonstra que existe um único sistema que obedece aos axiomas de Peano e o outro é utilizado na construção da operação de adição. Assim sendo, o objetivo deste minicurso é apresentar e discutir, de forma detalhada, a organização lógica dos fatos que se seguem a partir dos axiomas de Peano, na construção do conjunto dos números naturais. O trabalho se estende apenas, até a demonstração das primeiras propriedades da adição, em vista de adequar a exposição da teoria com o tempo disponível no curso. O nível da exposição é bastante abstrato, utilizando de modo bastante forte o conceito de função e tipos especiais de funções como, por exemplo, funções injetivas e compostas. Dessa forma, o minicurso é direcionado a estudantes de graduação em matemática ou de áreas afins, interessados em conhecer mais de perto a construção teórica do conjunto dos números naturais. Nesta abordagem é possível se ter uma boa experiência com o uso método axiomático na construção de teorias matemáticas, que será realizado sob um conjunto a partir do qual se pode construir os outros sistemas numéricos.*

Palavras Chave: *Números Naturais, Recursão, Adição, Construção Teórica.*

1 INTRODUÇÃO

Este programa de apresentar a construção formal de todas as propriedades do conjunto dos números naturais, geralmente, é omitido durante uma primeira abordagem por necessitar o uso do Teorema da Recursão, que é considerado por alguns autores "a nossa demonstração mais difícil envolvendo os números naturais" (BLOCH, 2011). A omissão desse teorema com sua demonstração, assim como de algumas outras propriedades, não chega a causar prejuízo para a compreensão das principais propriedades da adição e multiplicação dos números naturais, assim como o restante das outras propriedades desse conjunto. Como exemplo desse fato veja o segundo capítulo de (LIMA 2012). Embora difícil, esse programa é bastante instrutivo e permite que se introduza, já no conjunto dos números naturais, alguns conceitos muito importantes dentro da matemática como o conceito de Isomorfismo, onde "a noção de isomorfismo é universal em matemática" (TRUSS, 1997). Embora não seja algo trivial a demonstração de um isomorfismo entre dois sistemas de números naturais por necessitar o teorema da recursão para realiza-lo, ele é bastante intuitivo.

Outro fato que é mencionado como relevante para que se realize uma construção completa dos números naturais é a sua utilidade na construção dos outros sistemas numéricos. "Conforme

Lima (2012) menciona, uma exposição sistemática dos sistemas numéricos utilizados na Análise Matemática pode ser feita a partir dos números naturais, através de sucessivas extensões do conceito de número".

2 METODOLOGIA E MATERIAIS

O minicurso consistirá numa abordagem expositiva dos conceitos ministrados. Será utilizado quadro e projetor para realizar o acompanhamento; no quadro serão realizadas as demonstrações e o projetor para exibir as definições e auxiliar no encadeamento lógico dos fatos que foram apresentados para auxiliar no acompanhamento das demonstrações.

Começa-se com uma breve revisão sobre a linguagem de conjuntos e destacando os principais resultados que desempenharão pepel fundamental durante a construção do conjunto dos números naturais. Na sequência, é realizado a construção do conjunto dos números naturais, iniciando pela exibição dos axiomas de Peano e demonstrado os teoremas na ordem que em aparecem na seção (4).

3 ELEMENTOS DE LINGUAGEM DE CONJUNTOS

Com o objetivo de relembrar e fixar a linguagem apropriada para uso posterior dentro desse minicurso será exibido alguns fatos a respeito da linguagem de conjuntos. O ponto de vista dessa descrição é o ponto de vista ingênuo, onde não é apresentado a axiomática completa da teoria dos conjuntos.

Inicia-se com as noções consideradas primitivas de Conjunto, Elemento e a Relação de Pertinência. Um conjunto será simbolizado por uma letra maiúscula. Um elemento será simbolizado por uma letra minúscula latina. A relação de pertinência é representada pelo símbolo $\in$. Quando um elemento a pertencer a um conjunto A escreve-se $a \in A$, caso contrário escreve-se $a \notin A$.

Dois conjuntos A e B são ditos *Iguais* se, e somente se, todos os elementos de A forem elementos de B e se todos os elementos de B forem elementos de A. Quando isto ocorrer escreve-se $A = B$.

Dados dois conjuntos A e B, o conjunto B é dito um *Subconjunto* de A se todos os elementos de B são elementos de A. Quando isto ocorrer escreve-se $B \subset A$. O conjunto *Vazio* é representado pelo símbolo $\emptyset$ e evidentemente tem-se $\emptyset \subset A$. Quando $A = B$ tem-se $B \subset A$ e $A \subset B$. Quando ocorrer de $B \subset A$ e $B \neq A$ diz-se que B é um subconjunto próprio de A e tem-se $A \not\subset B$.

A *Reunião* dos conjuntos A e B, é definido por $A \cup B := \{x; x \in A \text{ ou } x \in B\}$, a *Interseção* é definida por $A \cap B := \{x; x \in A \text{ e } x \in B\}$, a *Diferença* é definido por $A \setminus B := \{x; x \in A \text{ e } x \notin B\}$.

Dado um conjunto A, chama-se de $\mathscr{P}(A)$ ao conjunto cujo seus elementos são os subconjuntos de A. Quando se estiver considerando algum subconjunto de $\mathscr{P}(A)$ este será representado pelas letras cursivas $\mathscr{C}$, $\mathscr{A}$, etc. Também estes símbolos serão utilizados para representar *coleções quaisquer de conjuntos*, não necessariamente subconjuntos de $\mathscr{P}(A)$ para um único conjunto A dado. Ainda em se tratando de coleções de conjuntos, dada uma coleção $\mathscr{C}$, define-se a *União dos Elementos* de $\mathscr{C}$ denotado por $\bigcup_{A \in \mathscr{C}} A$ que deve ser interpretado como $x \in \bigcup_{A \in \mathscr{C}} A$ se existe $A \in \mathscr{C}$ tal que $x \in A$. Analogamente, define-se a *Interseção dos Elementos* de $\mathscr{C}$ denotado por $\bigcap_{A \in \mathscr{C}} A$ que deve ser interpretado como $x \in \bigcap_{A \in \mathscr{C}} A$ se $x \in A$ para todo $A \in \mathscr{C}$.

Dados os conjuntos A e B, define-se o *Produto Cartesiano* de A e B como o conjunto $A \times B := \{(a,b); a \in A \text{ e } b \in B\}$. Chama-se de *Uma Relação de A em B*, que simboliza-se por R, a

um subconjunto qualquer do produto cartesiano $A \times B$. Quando tomamos o produto cartesiano somente sobre um conjunto A, se chama R de *Uma Relação em A*, que naturalmente, é um subconjunto qualquer do produto cartesiano $A \times A$. Dado uma relação R de A em B definimos os conjuntos $D(R) := \{a \in A; (a,b) \in R\}$ e $I(R) := \{b \in B; (a,b) \in R\}$. O conjunto $D(R)$ é chamado de *Domínio de R* e $I(R)$ é chamado de *Imagem de* de R. O conjunto B é chamado de *Contradomínio de R*.

Definição 3.1 *(função)*
Dados dois conjuntos A e B,chama-se de *Uma Função f de A em B*, que simboliza-se por $f : A \longrightarrow B$, a uma relação $R \subset A \times B$ com as propriedades:

$$\text{Para todo } a \in A \text{ existe } b \in B \text{ tal que } (a,b) \in R; \tag{1}$$

$$\text{Se } (a,b) \in R \text{ e } (a,b^{'}) \in R \text{ então } b^{'} = b. \tag{2}$$

Dada uma função f de A em B, f é dita ser: *Injetiva* se $a \neq b$ implica $f(a) \neq f(b)$, para todo $a,b \in A$; *Sobrejetiva*, se para todo $b \in b$ existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$; *Bijetiva*, se f for injetiva e sobrejetiva. Uma função $I_A : A \longrightarrow A$ tal que $f(a) = a$ para todo $a \in A$ chama-se *Função Identidade*.

Duas funções $f : A \longrightarrow B$ e $g : A \longrightarrow B$, f e g são ditas iguais se, e somente se, $f(a) = g(a)$ para todo $a \in A$.

Dado as funções $f : A \longrightarrow B$ e $g : A \longrightarrow B$, define-se a *Função Composta de g* por f como o conjunto $g \circ f := \{(a,c) \in A \times C;$ existe $b \in B$ tal que $f(a) = b$ e $g(b) = c\}$. Se forem dadas $f : A \longrightarrow B$ e $g : A \longrightarrow B$ e $h : C \longrightarrow D$ vale $(g \circ f) \circ h = g(f \circ h)$.

Dadas duas funções $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow A$, a função g é dita uma inversa à esquerda de f se $g \circ f = I_A$. Analogamente g é dita uma inversa à direita de f se $f \circ g = I_B$. Um fato que será de extrema importância posteriormente na demonstração de um fato a respeito dos números naturais que será aqui, apenas enunciado e não demonstrado, é que uma função $f : A \longrightarrow B$ é dita possuir uma *única inversa* $g : B \longrightarrow A$ se, e somente se, f é injetiva e sobrejetiva. Veja a demonstração desse fato em (LIMA 2012, p: 21 e 22).

Dados os conjuntos A, b e C uma função $f : A \times B \longrightarrow C$ é dita uma *Operação Binaria de* $A \times B$ *em* C. Uma função $f : A \times A \longrightarrow A$ é dita uma *Operação Binaria de em A*. Dado $(a,b) \in A \times A$ simbolizaremos o elemento $f(a,b) \in A$ por $a \Diamond b$; assim escreveremos $f(a,b) = a \Diamond b$ toda vez que estivermos associando o elemento $(a,b) \in A \times A$ a um elemento $f(a,b) \in A$ pela função f.

4 NÚMEROS NATURAIS, A CONSTRUÇÃO TEÓRICA

A construção teórica dos números naturais realizada aqui, segue de perto a abordagem realizada em Bloch (2011), Cohen (1963) e Coppel (2009). Praticamente todo o material exibido aqui, pode ser encontrado em qualquer um dos três livros referenciados ou em forma de teorema, de exemplo ou exercício. Aqui é feito um apanhado mais completo e colocado alguns detalhes adicionais nas demonstrações que se encontram neles, com o objetivo de tornar as demonstrações mais claras.

Definição 4.1 *(o conjunto $\mathbb{N}$)*
Dado um conjunto $\mathbb{N}$, $u \in \mathbb{N}$ e uma função $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$; chama-se de *Um Sistema de Números*

Naturais à tripla $\langle \mathbb{N}, u, s \rangle$ com as propriedades abaixo:

$$\begin{aligned} \text{A função} \quad & s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \text{ é injetiva;} && (3) \\ \text{Existe} \quad & u \in \mathbb{N} \setminus s(\mathbb{N}); && (4) \\ \text{Dado} \quad & X \subset \mathbb{N}, \text{ tal que } u \in X \text{ com } u \in \mathbb{N} \setminus s(\mathbb{N}) \text{ e se; } n \in X \text{ implica } s(n) \in \mathbb{N}, \\ \text{então:} \quad & X = \mathbb{N}. && (5) \end{aligned}$$

Escreve-se simplesmente $\mathbb{N}$ para representar a tripla $\langle \mathbb{N}, u, s \rangle$ com as três propriedades acima. Cada $n \in \mathbb{N}$ chama-se um número natural. A função s é chamada de função sucessor. As três propriedades são chamados os Axiomas de Peano. $\Diamond$

Teorema 4.1 *(teorema do 1)*
O conjunto $\mathbb{N} \setminus s(\mathbb{N})$ possui um único elemento.

Demonstração: O axioma (5) afirma que dado $X \subset \mathbb{N}$ com a propriedade de que ele possuir um elemento u de $\mathbb{N} \setminus s(\mathbb{N})$ e do fato de $n \in X$ implique $s(n) \in X$, então $X = \mathbb{N}$. Isto informa que é possível escrever $X = \{u\} \cup s(\mathbb{N})$, donde se pode escrever $\mathbb{N} = \{u\} \cup s(\mathbb{N})$. Logo o conjunto $\mathbb{N} \setminus s(\mathbb{N})$ possui um único elemento. $\square$

Teorema 4.2 *(um número natural é diferente de seu sucessor)*
Para todo $n \in \mathbb{N}$ têm-se $n \neq s(n)$.

Demonstração: Inicialmente define-se o conjunto $X := \{n \in \mathbb{N}; n \neq s(n)\}$ e então verifica-se se $1 \in X$. Com efeito, pelo axioma (4) $1 \notin s(\mathbb{N})$, logo, em particular $1 \neq s(1)$; portanto $1 \in X$.

Pelo axioma (5), se $1 \in X$ e da hipótese de que dado $n \in X$ implicar $s(n) \in X$, têm-se $X = \mathbb{N}$. Então, supondo que $n \in X$, têm-se por hipótese que $n \neq s(n)$; chamando $s(n) := x$, então pela injetividade de s, axioma (3), se $n \neq x$ então $s(n) \neq s(x)$. Logo $n \in X$ implica $s(n) \in X$; portanto pelo axioma (5) $X = \mathbb{N}$. $\square$

Teorema 4.3 *(função definida indutivamente)*
Dado um conjunto A, se uma relação $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow A$ é tal que: se conhece $f(1)$ e é único; e que nos informa como se obter $f(s(n))$ a partir de $f(n)$ é uma função bem definida para todo de $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Primeiro define-se o conjunto $X := \{n \in \mathbb{N}; (n,a) \in f \text{ para algum } a \in A\}$, com o objetivo de mostrar que para cada número natural n existe ao menos um a em A tal que $(n,a) \in f$. Por hipótese, se conhece $f(1)$, logo existe $a \in A$ tal que $a = f(1)$ onde $(1,a) \in f$; assim $1 \in X$. Supondo que um certo $n \in X$, donde se pode afirmar que existe *bi* A tal que $b = f(n)$ onde $(n,b) \in f$, então por hipótese, dado $f(n)$, a partir dele podemos obter $f(s(n))$, logo existirá $c \in A$ tal que $c = f(s(n))$ onde $(s(n),c) \in f$. Portanto $n \in X$ implica $s(n) \in X$; logo pelo axioma (5) $X = \mathbb{N}$.

Agora, define-se o conjunto $Y := \{m \in \mathbb{N};\ \text{se } (m,a),(m,a') \in f \text{ então } a' = a\}$ com o objetivo de mostrar que para cada número natural n existe um único a em A tal que $(n,a) \in f$. Por hipótese, $f(1)$ é único, logo se $(1,a),(1,a') \in f$, então $a' = a$; assim $1 \in Y$. Agora, dado $m \in \mathbb{N}$ supondo $m \in Y$, isto significa que se $(m,b),(m,b') \in f$ então $b' = b$. Como $f(s(m))$ é obtido a partir de $f(m)$ então tem-se $(s(m),c) \in f$. Se c for obtido a partir do fato que se conhece $f(m)$; do mesmo modo, se $(s(m),c') \in f$ então c' foi obtido a partir do fato que se conhece $f(m)$. Mas da hipótese de que $m \in Y$, significa que f permitirá apenas uma maneira de se obter $f(s(m))$. Logo $c' = c$ e portanto $m \in Y$ implica $s(m) \in Y$. Pelo axioma (5) $Y = \mathbb{N}$. Isto mostra que f é uma função bem definida para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Definição 4.2 *(isomorfismo de sistemas de números naturais)*
Dados os sistemas de números naturais $\langle \mathbb{N}, u, s\rangle$ e $\langle \mathbb{N}', u', s'\rangle$ têm-se $n \neq s(n)$, uma função $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}'$ é dita *Um Isomorfismo* entre os sistemas $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N}'$ se ela possuir as propriedades:

$$f(1) = 1'; \tag{6}$$
$$f(s(n)) = s'(n'). \tag{7}$$

Pelo teorema da função definida indutivamente, essa definição nos permite afirmar que se existe uma função satisfazendo as condições (6) e (7), então ela associa cada elemento de $\mathbb{N}$ a seu equivalente em $\mathbb{N}'$.

Teorema 4.4 *(da recursão)*
Dado um conjunto não vazio A, $a \in A$ e uma função $g\colon A \longrightarrow A$; existe uma única função $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow A$ com as seguintes propriedades:

$$f(1) = a; \tag{8}$$
$$f(s(n)) = g(f(n)). \tag{9}$$

Demonstração: Inicialmente define-se uma coleção $\mathscr{C}$ de subconjuntos de $\mathbb{N} \times A$ que deve possuir algumas propriedades. Seja $\mathscr{C} := \{T; T \subset \mathbb{N} \times A\}$ onde T possui as seguintes propriedades:

$$(1, a) \in T; \tag{10}$$
$$(s(n), g(b)) \in T \text{ sempre que } (n, b) \in T. \tag{11}$$

O primeiro fato a ser verificado é se $\mathscr{C}$ é não vazio. A primeira informação que se tem garantida é que o produto cartesiano $\mathbb{N} \times A$ é não vazio, porque ambos os conjuntos $\mathbb{N}$ e A são não vazios; outro fato evidente é que o elemento $(1, a)$ existe em $\mathbb{N} \times A$ porque o 1 tem sua existência confirmada pelo axioma (4) enquanto que a tem sua existência confirmada pela hipótese de que A é não vazio.

O conjunto $\mathbb{N} \times A$ também possui a propriedade ditada na propriedade (11) porque dado um elemento qualquer $(n, b) \in \mathbb{N}$, para $n \in \mathbb{N}$ existe $s(n)$ em $\mathbb{N}$ pelo axioma (3); para $b \in A$ existe $g(b)$ em A porque g é uma função em A. Logo $(n, b) \in \mathbb{N} \times A$ implica $(s(n), g(b)) \in \mathbb{N} \times A$.

Como o conjunto $\mathbb{N} \times A$ possui as propriedades ditadas em (10) e (11) existem subconjuntos $T \subset \mathbb{N} \times A$ não vazios de modo que $\mathscr{C}$ é não vazio. De posse do que já foi demonstrado, define-se o conjunto

$$f := \bigcap_{T \in \mathscr{C}} T; \tag{12}$$

Agora o objetivo é mostrar que o conjunto f é a função cuja a existência deseja-se provar. Observe que $f \in \mathscr{C}$ porque ele possui as propriedades (10) e (11); além disso, f da forma como foi definida é o menor subconjunto de $\mathbb{N} \times A$ que possui estas propriedades. Para mostrar que f é uma função verifica-se que ela possui as propriedades ditadas na definição de função. Então considere o conjunto abaixo

$$N := \{n \in \mathbb{N};\ \text{existe } b \in A \text{ tal que } (n, b) \in f\}$$

Para $n = 1$ tem-se pelo menos o elemento a em A tal que $(1, a) \in f$ porque f é a interseção de subconjuntos de $\mathbb{N} \times A$ que satisfazem a condição (10). Logo $1 \in N$. Supondo $n \in \mathbb{N}$, então

para $s(n)$ tem-se que existe pelo menos o elemento $g(b)$ em A tal que $(s(n), g(b)) \in f$, porque da hipótese de que $(n,b) \in f$, pela condição (11) tem-se $(s(n), g(b)) \in f$, pois f é a interseção de conjuntos que satisfazem a condição (11). Logo $n \in \mathbb{N}$ implica $s(n) \in \mathbb{N}$. Pelo axioma da indução $N = \mathbb{N}$ e f satisfaz a condição (1) da definição de função.

Para verificar-se a segunda propriedade da definição de função considere o conjunto

$$M := \{m \in \mathbb{N};\ \text{se } (n,b),(n,b^{'}) \in f \text{ então } b = b^{'}\}$$

Sabe-se que $(1,a) \in f$ por que $f \in \mathscr{C}$; supondo por absurdo que exista $(1,b) \in f$ com $b \neq a$, considere o conjunto $f_b := f - \{(1,b)\}$; agora, dado $(n,b) \in f$ com $n \neq 1$ tem-se que $(n,b) \in f_b$ e por conseguinte, $(s(n), g(b)) \in f_b$ de modo que $f_b \in \mathscr{C}$; disso pela definição de f, temos que $f \subset f_b$ onde f_b é um subconjunto próprio de f o que é uma contradição; logo $1 \in M$.

Supondo $n \in M$, o que permite ser afirmado que se, $(n,b),(n,b^{'}) \in f$ então tem-se $b = b^{'}$; trabalhando-se com $s(n)$ e supondo $(s(n),c) \in f$ com $c \neq g(b)$, considere o conjunto $f_c := f - \{(s(n),c)\}$; o primeiro fato a ser observado é que $(1,a) \in f_c$ O porque $1 \neq s(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Agora, dado $(m,d) \in f_c$ tem-se dois casos a considerar:

$$(s(m), g(d)) = (s(m), c)$$

$$(s(m), g(d)) \neq (s(m), c)$$

No primeiro caso temos $g(d) \neq g(b)$ com $s(m) = s(n)$ donde, $m = n$ pela injetividade de s e $d \neq b$ porque g é uma função. Logo tem-se $(n,b),(n,d) \in f_c$ com $b \neq d$ o que entra em contradição com a hipótese de indução.

No segundo caso, como $(s(m), g(d)) \neq (s(m), c)$, então dado $(m,d) \in f_c$ isto implica que $(s(m), g(d)) \in f_c$, logo $f_c \in \mathscr{C}$; disso pela definição de f, temos que $f \subset f_c$ onde f_c é um subconjunto próprio de f o que é uma contradição; logo $s(n) \in M$. Isto prova que o conjunto f é uma função.

Para demonstrar a unicidade suponhamos que exista outra função $f^{'}$ possuindo as propriedades (10) e (11). Então

$$f^{'}(1) = a = f(1)$$

supondo-se $f^{'}(n) = f(n)$ então

$$f^{'}(s(n)) = g(f^{'}(n)) = g(f(n)) = f(s(n))$$

pela propriedade (9) e pela hipótese de indução. □

O axioma (5) da definição do conjunto dos números naturais é bastante conhecido pelo nome Axioma da Indução. "Intuitivamente, ele significa que todo número natural n pode ser obtido a partir de 1, tomando-se seu sucessor $s(1)$, o sucessor deste, $s(s(1))$, e assim por diante, com um número finito de etapas" LIMA (2013). Utilizando o teorema da recursão é possível dar uma prova de que é possível obter o "restante" dos números naturais a partir do número 1.

Seja $A = \mathbb{N} \backslash \{1\}$, $a = s(1)$ e g igual à restrição da função s ao subconjunto $\mathbb{N} \backslash \{1\}$; pelo teorema da recursão existe uma única função $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow A$ definida por:

$$f(1) = s(1)$$

$$f(s(n)) = g(f(n))$$

donde se obtém:

$$s(1), s(s(1)), s(s(s(1))), s(s(s(s(1)))), \cdots$$

definindo-se $s(1) := 2$, $s(s(1)) := 3$, etc. Obtém-se o conjunto

$$s(\mathbb{N}) = \{2, 3, 4, 5, \cdots\}$$

como $\mathbb{N} = \{1\} \cup s(\mathbb{N})$, pelo teorema (4.1), tem-se

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \cdots\}$$

Esta aplicação do teorema da recursão mostra que é possível obter todos os números naturais a partir do número 1 onde a função f serve para tomar-se as iteradas da função s.

Teorema 4.5 *(unicidade do $\mathbb{N}$)*
Sejam $\langle \mathbb{N}, u, s \rangle$ e $\langle \mathbb{N}', u', s' \rangle$ dois conjuntos de números naturais, então existe um único isomorfismo $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}'$ definido por:

$$f(1) = 1'; \tag{13}$$

$$f(s(n)) = s'(f(n)). \tag{14}$$

Demonstração: Pelo teorema da recursão pondo $A = \mathbb{N}'$, $a = 1'$ e $g = s'$; existe uma única função definida pelas propriedades (13) e (14). Falta mostrar que f é bijetiva. Para isso será mostrado que existe uma função h que é inversa à direita e à esquerda de f.

Inicialmente observa-se do fato de que $\mathbb{N}'$ também é um sistema de números naturais pode-se formar a função $h\colon \mathbb{N}' \longrightarrow \mathbb{N}$ também definida por

$$h(1') = 1; \tag{15}$$

$$h(s'(n')) = s(h(n')). \tag{16}$$

que por conseguinte é única pelo teorema da recursão possuindo as mesmas propriedades da função f. O objetivo agora é mostrar que h é inversa à direita e à esquerda de f. Começa-se mostrando que $h \circ f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ é uma função identidade. Com efeito,

$$(h \circ f)(1) = h(f(1)) = h(1') = 1$$

supondo $(h \circ f)(n) = h(f(n)) = h(n') = n$ então

$$(h \circ f)(s(n)) = h(f(s(n))) = h(s'(f(n))) = h(s'(n')) = s(h(n')) = s(n)$$

logo $(h \circ f)(s(n)) = s(n)$ o que mostra que $s(n)$ em $\mathbb{N}$ está associado a ele mesmo pela função $h \circ f$, portanto h é inversa à esquerda de f.

Agora se mostra também que $f \circ h\colon \mathbb{N}' \longrightarrow \mathbb{N}'$ é uma função identidade. Com efeito,

$$(f \circ h)(1') = f(h(1')) = f(1) = 1'$$

supondo $(f \circ h)(n) = f(h(n')) = f(n) = n'$ então

$$(f \circ h)(s'(n')) = f(h(s'(n'))) = f(s(h(n'))) = f(s(n)) = s'(f(n)) = s'(n')$$

logo $(f \circ h)(s'(n')) = s'(n')$ o que mostra que $s'(n')$ em $\mathbb{N}'$ está associado a ele mesmo pela função $f \circ h$, portanto h é inversa à direita de f. Isso mostra que f é bijetiva e portanto um isomorfismo entre os sistemas de números naturais $\langle \mathbb{N}, u, s \rangle$ e $\langle \mathbb{N}', u', s' \rangle$. $\square$

Teorema 4.6 *(operação de adição em $\mathbb{N}$)*
A função $f\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida de modo que para cada $m \in \mathbb{N}$ tem-se:

$$f(m,1) = m; \tag{17}$$
$$f(m,s(n)) = s(f(m,n)). \tag{18}$$

está bem definida e é única.
Demonstração: Inicialmente temos que mostrar que f está bem definida, para isso, o conjunto

$$f := \{(a,b) \in (\mathbb{N}\times\mathbb{N})\times\mathbb{N};\ a \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \text{ e } b \in \mathbb{N}\}$$

deve possuir as propriedades (1) e (2) da definição de função.

Inicialmente verificaremos (1), para isso fixemos $m \in \mathbb{N}$ e consideremos a restrição

$$f\,|_{\{m\}\times\mathbb{N}}\colon \{m\}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

com isso pode-se utilizar o teorema da recursão onde, dado o conjunto $A = \mathbb{N}$, o qual é não vazio, $m \in \mathbb{N}$ e pomos $a = s(m)$, a função auxiliar g igual à função sucessor s; nessas condições, existe uma única função $f_m\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ com as propriedades:

$$f_m(1) = s(m); \tag{19}$$
$$f_m(s(n)) = s(f_m(n)). \tag{20}$$

Com isso, para cada $(m,n) \in \{m\}\times\mathbb{N}$ existe $b \in \mathbb{N}$ tal que $b = f_m(n)$, onde $((m,n),b) \in f\,|_{\{m\}\times\mathbb{N}}$. Falta mostrar que para todo $m \in \mathbb{N}$ existe uma restrição $f\,|_{\{m\}\times\mathbb{N}}$. Por indução, vamos mostrar que o conjunto $M := \{m \in \mathbb{N};\ \text{existe } f\,|_{\{m\}\times\mathbb{N}}\}$ é igual ao conjunto do números naturais.

Para $m = 1$ temos $f\,|_{\{1\}\times\mathbb{N}}$ e queremos mostrar que vale $f_1(1) = s(1)$ e $f_1(s(n)) = s(f_1(n))$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja $X := \{n \in \mathbb{N}; f_1(1) = s(1) \text{ e } f_1(s(n)) = s(f_1(n))\}$. Pelo teorema da recursão, dado o conjunto $A = \mathbb{N}$, o qual é não vazio, $1 \in \mathbb{N}$ e pondo $a = 1$, a função auxiliar g igual à função sucessor : existirá uma única função $f_1\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ com as propriedades $f_1(1) = s(1)$ e $f_1(s(n)) = s(f_1(n))$. Para $n = 1$, pela definição de f_1 temos $f_1(1) = s(1)$, logo $1 \in X$. Supondo $n \in X$ o que permite afirmar que $f_1(n)$ é conhecido, seja $s(n)$, pela definição f_1 temos $f_1(s(n)) = s(f_1(n))$, pela hipótese de indução $f_1(n)$ é conhecido, logo a última igualdade é verdadeira, portando $n \in X$ implica $s(n) \in X$; logo $X = \mathbb{N}$. Portanto $1 \in M$.

Supondo $n \in M$, permitindo que se afirme que $f\,|_{\{m\}\times\mathbb{N}}$, definida por meio do teorema da recursão pondo $A = \mathbb{N}$, o qual é não vazio, $m \in \mathbb{N}$, $a = s(m)$ e a função auxiliar g igual à função sucessor s; de modo que existirá uma única função $f_m\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ com as propriedades $f_m(1) = s(m)$ e $f_m(s(n)) = s(f_m(n))$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Toma-se então $s(m)$ onde se quer definir $f\,|_{\{s(m)\}\times\mathbb{N}}$ de modo que vale $f_{s(m)}(1) = s(s(m))$ e $f_{s(m)}(s(n)) = s(f_{s(m)}(n))$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Deve-se observar que $f\,|_{\{s(m)\}=f_m\circ s}$ e que por (20) tem-se $s\circ f_m = f_m \circ s$. Este fato pode ser demonstrado por indução. Com efeito, $f_{s(m)}(1) = s(s(m)) = (s\circ f_m)(1)$; supondo para n que se tem $f_{s(m)}(n) = (s\circ f_m)(n)$, então para $s(m)$ têm-se $f_{s(m)}(s(n)) = (f_m\circ s)(s(n)) = ((f_m\circ s)\circ s)(n) = ((s\circ f_m)\circ s)(n) = s\circ(f_m\circ s)(n) = s\circ(s\circ f_m)(n) = s\circ(s\circ f_m)(n)$.

Agora, diante do fato de que $f_{s(m)} = s\circ f_m$ por meio do teorema da recursão pondo $A = \mathbb{N}$, o qual é não vazio, $s(m) \in \mathbb{N}$, $a = s(s(m))$ e a função auxiliar g igual à função sucessor s; assim

existirá uma única função $f_{s(m)}\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que $f_{s(m)}(1) = s(s(m))$ e $f_{s(m)}(s(n)) = s(s(f_m(n)))$, a qual será mostrado válida para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja $Y := \{n \in \mathbb{N}; f_{s(m)}(1) = s(s(m))$ e $f_{s(m)}(s(n)) = s(s(f_m(n)))\}$. Para $n = 1$ pela definição de $f_{s(m)}$ temos $f_{s(m)}(1) = s(s(m))$, logo $1 \in Y$. Supondo $n \in Y$ o que nos permite afirmar que $f_{s(m)}(n) = s(f_m(n))$ é conhecido, seja $s(n)$, pela definição $f_{s(m)}$ temos $f_{s(m)}(s(n)) = s(s(f_m(n)))$,pela hipótese de indução $f_{s(m)}(n) = s(f_m(n))$, logo a última igualdade é verdadeira, portando $n \in Y$ implica $s(n) \in Y$; logo $Y = \mathbb{N}$. O que demonstra que f possui a propriedade (1).

Para demostrar (2), consideremos o conjunto $X := \{n \in \mathbb{N};$ se $((m,n),c),((m,n),c^{'}) \in f\,|_{\{m\}}$, então $c^{'} = c$, onde $c = f_m(n)\}$. Para $n = 1$, se $c = f_m(1)$ e $c^{'} = f_m(1)$ então $c = s(m) = c^{'}$. Logo $1 \in X$. Supondo $n \in X$, permitindo que se afirme que $c = f_m(n)$ e $c^{'} = f_m(n)$ então $c^{'} = c$. Trabalhando com $s(n)$, sejam $b = f_m(s(n))$ e $b^{'} = f_m(s(n))$, por (20) temos $f_m(s(n)) = s(f_m(n))$, então se $s(f_m(n)) = s(f_m(n))$, pela injetividade da função s temos $f_m(n) = f_m(n)$, fato este verdadeiro por que pela hipótese de indução temos. Portanto $s(n) \in X$; logo pelo axioma (5) $X = \mathbb{N}$. Assim temos que a restrição $f\,|_{\{m\}\times\mathbb{N}}$ é uma função.

Assim, para cada $m \in \mathbb{N}$ tem-se: $f(m,1) = f_m(1) = s(m)$ e $f(m,s(n)) = f_m(s(n)) = s(f_m(n)) = s(f(m,n))$.

Para demonstrar a unicidade seja $f^{'}$ tal que para cada $m \in \mathbb{N}$ tem-se $f^{'}(m,1) = s(m)$ e $f^{'}(m,s(n)) = s(f^{'}(m,n))$, então

$$f^{'}(m,1) = f^{'}_m(1) = s(m) = f_m(1) = f(m,1)$$

se $f^{'}(m,n) = f^{'}_m(n) = f_m(n) = f(m,n)$ então

$$f^{'}(m,s(n)) = f^{'}_m(s(n)) = s(f^{'}_m(n)) = s(f_m(n))f_m(s(n)) = f(m,s(n))$$

Logo $f^{'} = f$. $\square$

Definição 4.3 *(adição em $\mathbb{N}$)*

Dado $m \in \mathbb{N}$ a operação binária $f\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida por:

$$f(m,1) = m; \tag{21}$$

$$f(m,s(n)) = s(f(m,n)). \tag{22}$$

chama-se de *Adição* e escreve-se $f(m,n) := m+n$, para todo $m,n \in \mathbb{N}$ e lê-se:*m mais n*. $\Diamond$

Portanto, pela definição de adição escreve-se $s(m) := m+1$ e $m+s(n) := s(m+n)$.

Teorema 4.7 *(associatividade da +)*

Têm-se $f(m,f(n,p)) = f(f(m,n),p)$ para todo $m,n,p \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Se fixa m e n e trabalha-se por indução em p. Para $p = 1$ têm-se

$$f(m,f(n,1)) = f(m,s(n)) = s(f(m,n)) = f(f(m,n),1)$$

logo o teorema é válido para $p = 1$. Supondo o teorema válido para um certo $p \in \mathbb{N}$ o que permite que se afirme que $f(m,f(n,p)) = f(f(m,n),p)$ trabalhando com $s(p)$ têm-se

$$f(m,f(n,s(p))) = f(m,s(f(n,p))) = s(f(m,f(n,p))) = s(f(f(m,n),p))$$

$$s(f(f(m,n),p)) = f(f(m,n),s(p)).$$

Logo o teorema é válido para $s(p)$, assim pelo axioma da indução o teorema é válido para todo $p \in \mathbb{N}$. $\square$

Teorema 4.8 *(comutatividade da +)*
Têm-se $f(m,n) = f(n,m)$ para todo $m,n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Se fixa $m = 1$ e trabalha-se por indução em n. Para $n = 1$ têm-se

$$f(1,1) = s(1) = f(1,1).$$

Supondo válido para um certo $n \in \mathbb{N}$, trabalhando-se com $s(n)$ têm-se

$$f(1,s(n)) = s(f(1,n)) = s(f(n,1)) = f(f(n,1),1) = f(s(n),1).$$

logo, da hipótese de que o teorema válido para n implica válido para $s(n)$. portanto é válido para todo número natural. Perceba que na penúltima igualdade foi utilizada a associatividade da adição para completar o argumento na última igualdade.

Supondo agora o teorema válido para um certo $m \in \mathbb{N}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, trabalhando-se com $s(m)$, por indução em n têm-se para $n = 1$

$$f(s(m),1) = s(s(m)) = s(f(m,1)) = s(f(1,m)) = f(1,s(m)).$$

Supondo agora $f(s(m),n) = f(n,s(m))$ para um certo $n \in \mathbb{N}$ trabalhando-se com $s(n)$ têm-se

$$f(s(m),s(n)) = s(f(s(m),n)) = s(f(n,s(m))) = s(n,f(m,1)) = s(f(n,f(1,m))).$$

$$s(f(n,f(1,m))) = s(f(f(n,1),m)) = s(f(s(n),m)) = f(s(n),s(m)).$$

Logo, o teorema válido para $s(m)$, portanto é válido para todo número natural. □

Teorema 4.9 *(lei do corte +)*
Se $f(m,p) = f(n,p)$ então $m = n$; para todo $m,n,p \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Se fixa m e n e trabalha-se por indução em p. Para $p = 1$ têm-se

$$f(m,1) = f(n,1)$$

então $s(m) = s(n)$, pela injetividade da função s, axioma (3) têm-se $m = n$. logo o teorema é válido para $p = 1$. Supondo o teorema válido para um certo $p \in \mathbb{N}$ trabalhando com $s(p)$ têm-se $f(m,s(p)) = f(n,s(p))$ então $s(f(m,p)) = s(f(n,p))$ e por (3) têm-se $f(m,p) = f(n,p)$; e pela hipótese de indução $m = n$. Logo o teorema é válido para $s(p)$, assim pelo axioma da indução, (5), o teorema é válido para todo $p \in \mathbb{N}$. □

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS:

A exibição completa das primeiras propriedades e suas demonstrações, que se seguem a partir dos axiomas de Peano permite um entendimento mais refinado da teoria dos números naturais e que se tenha condições de realizar futuramente um estudo completo dessa teoria. No que diz respeito a realizar essa construção, ela é importante porque a partir dos números naturais é possível a construção dos outros sistemas numéricos. Também, o conceito de isomorfismo entre sistemas de números naturais foi abordado, o que permite que se tenha um contado com essa ideia abstrata da matemática, já no contexto da construção do conjunto dos números naturais, que serve para identificar sistemas aparentemente diferentes possuindo estruturas idênticas. Ainda, esta construção teórica, proporciona uma boa experiência com o uso do Método Axiomático, tão difundido na comunidade matemática.

REFERÊNCIAS

BLOCH, E. D. **The Real Numbers and Real Analysis**. New York: Springer, 2011.

COHEN, L. W. EHRLICH, G. **The Structure of the Real Numbers System**. New York: Van Nostrand Reinhold Company, 1963.

COPPEL, W. A. **The Expanding Universe of Numbers. In: COPPEL. W. A. Number Theory an Introduction to Mathematics**. New York: Springer, 2009. Cap. 1, p.1-82.

LIMA, E. L. **Curso de Análise Vol. 1**. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

LIMA, E. L. Conjuntos Finitos e Infinitos. In: LIMA, E. L. **Análise Real Volume 1**. Rio de Janeiro: IMPA, 2013. Cap. 1, p. 1-11.

TRUSS, J. K. The Natural Numbers. In: TRUSS, J. K. **Foundations of Mathematical Analysis**. New York: Oxford University Press, 1997. Cap. 1, p.1-21.