XX EREMAT SUL

Encontro Regional
de Estudantes de
Matemática da Região Sul

SÉRIES DE FOURIER E UM MODELO DE MÍNIMOS QUADRADOS PARA A AUDIÇÃO HUMANA

Daiane Campara Soares – daianesoares@unipampa.edu.br
Fundação Universidade Federal do Pampa, Campus Itaqui, CEP 97650-000 – Itaqui, RS, Brasil
Karla Beatriz Vivian Silveira – karlasilveira@unipampa.edu.br
Fundação Universidade Federal do Pampa, Campus Itaqui, CEP 97650-000 – Itaqui, RS, Brasil

Resumo. *A presente proposta de minicurso, a ser desenvolvido no XX EREMAT – Encontro Regional de Estudantes de Matemática, na UNIPAMPA, Campus Bagé, é proveniente de estudos sobre aplicações de Álgebra Linear, com ênfase no método de mínimos quadrados e nas Séries de Fourier. A prática desta ação visa apresentar a importância do estudo e aplicação de conhecimentos da Álgebra Linear e suas inter-relações com conteúdos de Cálculos e Geometria Analítica e realizar discussões e reflexões acerca do método dos Mínimos Quadrados e as séries de Fourier – no contexto da audição humana –, contemplando seus teoremas fundamentais e suas técnicas de resolução, sem abordar os conceitos relacionados à convergência. O minicurso, será desenvolvido em 4h e neste período, disponibilizar-se-á uma apostila aos participantes, contendo os conhecimentos teóricos e pré-requisitos, que contribuam na compreensão e realização da aplicação, bem como, exemplos de como trabalhar com funções no espaço vetorial C[a, b]. Esperamos que o minicurso motive os participantes a realizarem experiências investigativas desta natureza, envolvendo a Álgebra Linear.*

Palavras Chave: *Álgebra linear, Audição humana, Espaços com produto interno, Método da aproximação de mínimos quadrados, Projeção ortogonal, Séries de Fourier.*

1. INTRODUÇÃO

Esse minicurso trata de uma aplicação do *método da aproximação de mínimos quadrados a um modelo para a audição humana*, visando apresentar a importância do estudo e aplicação de conhecimentos da Álgebra Linear e suas inter-relações com conteúdos de Cálculos e Geometria Analítica no XX EREMAT – Encontro Regional de Estudantes de Matemática – a ser realizado na Universidade Federal do Pampa-UNIPAMPA, do Campus Bagé.

A aplicação no modelo da audição humana traz como pré-requisitos conhecimentos sobre Espaços de produto interno, Projeção Ortogonal e Séries de Fourier. Este último tema, pouco abordado em cursos de Matemática – bacharelado e licenciatura –, "*é de extrema importância nas Engenharias, nas Ciências e na Matemática*" (ANTON & RORRES, 2012, p. 386),

principalmente para o desenvolvimento de aplicações, pois, poucos componentes curriculares proporcionam aos alunos um estudo aprofundado neste assunto.

No que tange séries de Fourier, a ser desenvolvido durante o minicurso, pretende-se realizar discussões e reflexões acerca deste tema, contemplando seus teoremas fundamentais e suas técnicas de resolução, sem abordar os conceitos relacionados à convergência.

A Série de Fourier é importante, pois aproxima funções contínuas em determinados intervalos compactos, por polinômios trigonométricos. Tal aproximação determina o menor erro quadrático médio, que na prática significa a melhor aproximação possível da função dentre as várias possibilidades que estão sendo trabalhadas. Este método de aproximação, em relação ao modelo para a audição humana, quando aplicado, resulta num menor desvio do caminho neural até o cérebro, significando assim, uma audição mais precisa.

Abordando as aproximações de mínimos quadrados, de um ponto de vista geométrico, comprovaremos que a projeção ortogonal é a melhor aproximação de uma dada função em um determinado subespaço. No modelo para a audição humana, uma onda sonora periódica p(t) pode ser aproximada, via método dos mínimos quadrados, pela função q(t), que é uma soma finita de ondas senoidais. Na prática, a energia da diferença entre as duas ondas sonoras – p(t) e q(t) – representa o erro da aproximação e sendo esta energia tão pequena quanto possível, as duas ondas produzem a mesma sensação de som e o ouvido não percebe nenhuma diferença entre elas, constatando assim, que a aproximação é de fato a melhor possível.

Ao trazermos o estudo destes temas no contexto da aplicação a ser desenvolvida para o minicurso, podemos compreender o funcionamento de um dos principais órgãos do sentido do nosso corpo, o aparelho auditivo e que, associado ao contexto matemático, especialmente em relação à Álgebra Linear, os participantes do minicurso poderão compreender e aplicar resultados relacionados a espaços com produto interno, projeção ortogonal, resolução de sistemas por meio do método de mínimos quadrados e sobre aproximação de funções contínuas em intervalos compactos, utilizando as Séries de Fourier.

2. AUDIÇÃO HUMANA: APLICAÇÃO DA ÁLGEBRA LINEAR

2.1. O Método da aproximação de mínimos quadrados e a Série de Fourier

Historicamente, o método da aproximação de Mínimos Quadrados está relacionado ao problema de Ajuste de Dados e, dessa forma, é empregado como uma técnica de otimização matemática, principalmente, em Cálculo Numérico.

O problema consiste em obter uma relação matemática $y = f(x)$ entre duas variáveis – x e y – por meio do "ajuste" de uma curva aos pontos do plano e que satisfazem aos vários pares ordenados (x, y), determinados experimentalmente.

Observando o padrão apresentado pelos pontos, podemos estabelecer a forma geral da curva $y = f(x)$ a ser ajustada e que represente a melhor aproximação ao conjunto de dados experimentais.

Como os pontos são obtidos experimentalmente, muitas vezes os dados apresentam "erros" de medição, impossibilitando-nos encontrar a curva desejada – que passe por todos os pontos. Para que possamos perceber melhor a sua relevância, analisamos o quadrado da norma em termos das componentes, pois, o quadrado de números muito pequenos não proporcionaria um erro relevante, enquanto que, o quadrado de números grandes daria maior relevância para o desvio e assim, perceberíamos que a aproximação não está precisa.

Fazemos o uso da aplicação do método de aproximação de mínimos quadrados a um problema mais simples, quando buscamos tratar de sistemas lineares imprecisos e que necessitam de soluções aproximadas.

Estudos realizados por Anton & Rorres (2012) nos mostram que a inconsistência de um sistema do tipo $Ax = b$ pode ter sido gerada por erros de medição nos coeficientes de A e, para solucionar o problema, passamos a procurar um vetor $\boldsymbol{x}$ que se aproxime de uma solução exata. Nesse sentido, o vetor $\boldsymbol{x}$ minimiza $\|b - Ax\|$ em relação ao produto interno euclidiano de $\mathbb{R}^n$, e podemos entender essa norma como o "erro" da aproximação entre $A\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{b}$. Percebemos que, quanto menor o erro, melhor a aproximação.

Durante o minicurso, mostraremos que essa melhor aproximação, na verdade, é a projeção ortogonal de $\boldsymbol{b}$ sobre um subespaço vetorial W de $\mathbb{R}^3$. As projeções ortogonais também são usadas para aproximar determinadas funções, relativamente complexas, por meio de funções mais simples, que facilitam as manipulações algébricas e o desenvolvimento dos cálculos.

Partimos do problema mais geral de aproximação, descrito por Anton & Rorres (2012, p. 382): "Dada uma função f contínua num intervalo $[a, b]$, encontramos a "melhor aproximação possível" de f entre todas as funções de um subespaço W especificado de $C[a, b]$." e, na tentativa de buscar a solução para esse problema, no contexto da nossa aplicação, primeiro formalizamos matematicamente a frase "melhor aproximação em $[a, b]$" e a partir daí utilizamos os conhecimentos previamente desenvolvidos sobre o método dos mínimos quadrados e as séries de Fourier.

O tipo mais elementar de onda sonora assemelha-se a uma onda senoidal e uma onda sonora não elementar pode ser expressa como uma soma finita de ondas senoidais. Isto é, quando tivermos uma onda elementar p(t), buscaremos uma forma de aproximá-la – via método dos mínimos quadrados – por uma onda não elementar q(t) já que, a resposta do ouvido a esses dois tipos de onda é a mesma. Ao utilizarmos o método dos mínimos quadrados, para aproximar uma função no espaço vetorial $C[0, T]$, buscamos minimizar o erro da média quadrática

$$\int_0^T [f(t) - g(t)]^2 dt \tag{1}$$

e, ao fazermos as contas para expressar tal função como um polinômio trigonométrico, recaímos no cálculo da Série de Fourier da função, que é uma ferramenta para encontrar tal polinômio trigonométrico. Figueiredo (2012, p. XV) salienta que "A questão central na teoria das séries de Fourier é expressar uma dada função como uma série de senos ou (e) co-senos, os quais, [...], são autofunções de determinados problemas de autovalor.".

Uma interpretação geométrica do cálculo da Série de Fourier associada a uma função pode ser relacionada com a projeção ortogonal. Para ver isso, vamos fazer primeiro uma análise de um exemplo em um contexto mais simples[1]. Considere um espaço vetorial real munido com o produto interno usual:

$$< x, y >= \sum_{j=1}^{n} x_j y_j \ , \qquad x = (x_1, \dots , x_n) \ , \qquad y = (y_1, \dots , y_n). \tag{2}$$

Sabemos que os vetores $e_1 = (1, 0, \dots , 0), \dots , e_n = (0, \dots , 0,1)$ formam uma base para $\mathbb{R}^n$, e portanto todo vetor $x \in \mathbb{R}^n$ pode ser expresso como uma combinação dos vetores $e_1, \dots , e_n$,

[1] Disponível no livro **EDP: um curso de graduação** (2007, pg. 106).

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \tag{3}$$

E, como a base $\{e_1, \dots, e_n\}$ é ortonormal, obtemos que

$$< x, e_k >= < \sum_{j=1}^{n} x_j e_j, e_k >= x_k \tag{4}$$

o que significa que $x_j e_j$ é a projeção ortogonal do vetor *x* sobre a reta determinada pelo vetor e_j.

Contextualizando agora para as Séries de Fourier, temos também um espaço vetorial C[*a*, *b*], espaço das funções contínuas definidas no intervalo [*a*, *b*] e munido com um produto interno dado por

$$< f, g > \int_a^b f(t) g(t)\, dt \tag{5}$$

e uma base ortogonal, formada por $\{1, \cos(x), \cos(2x), \dots, \cos(nx), sen(x), \dots, sen(nx)\}$, para normalizar essa base transformando-a numa base ortonormal $\{g_0, g_1, \dots, g_{2n}\}$, utilizamos de uma técnica conhecida como Processo de Gram-Schmidt que, durante o minicurso, mostraremos como pode ser aplicada. Tendo todos os ingredientes e, sabendo geometricamente que a projeção ortogonal da função *f* sobre um subespaço *W* de C[*a*, *b*] é a melhor aproximação de mínimos quadrados de *f* em *W*, escrevemos a projeção da seguinte forma:

$$proj_W f = \frac{a_0}{2} + [a_1 \cos(x) + \dots + a_n \cos(nx)] + [b_1 \operatorname{sen}(x) + \dots + b_n \operatorname{sen}(nx)] \tag{6}$$

onde cada um dos $a_i{}'s$ e $b_i{}'s$ são chamados coeficientes de Fourier de *f*.

É intuitivo que o erro quadrático médio fique cada vez menor conforme a nossa aproximação vai melhorando, isto é, de acordo com o aumento do número de termos na aproximação de mínimos quadrados. É possível provar que quando o número de termos tende a infinito, o erro quadrático médio tende a zero, o que representaria a igualdade:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k sen(kx)) \tag{7}$$

e o lado direito dessa igualdade que é conhecido como **série da Fourier** de *f*. Dessa forma, as séries de Fourier podem ser relacionadas também com a projeção ortogonal.

Contextualizando com a aplicação que pretendemos desenvolver no minicurso, é importante apresentarmos informações relacionadas ao sistema auditivo, para melhor entendermos a sua anatomia, e assim, visualizar onde é necessário utilizarmos os conhecimentos da Álgebra Linear e suas inter-relações com conteúdos de Cálculos e Geometria Analítica, bem como as Séries de Fourier.

2.2 O mecanismo de funcionamento de aparelho auditivo humano

Segundo Heneine (2008), o aparelho auditivo pode ser dividido em 3 setores: **Ouvido Externo** que é formado pela orelha e o canal auditivo, **Ouvido Médio** que é uma concavidade limitada pelo tímpano e pelas paredes ósseas, contém três ossículos importantes para a transmissão do som ao ouvido interno: martelo, bigorna e estribo e **Ouvido Interno** que é uma cavidade fechada, onde circula um líquido envolvendo as estruturas aí contidas. Contém a cóclea e os canais semicirculares.

Podemos analisar a anatomia do ouvido humano, segundo a Fig. 1. (disponível em **Biofísica Básica,** 2008)

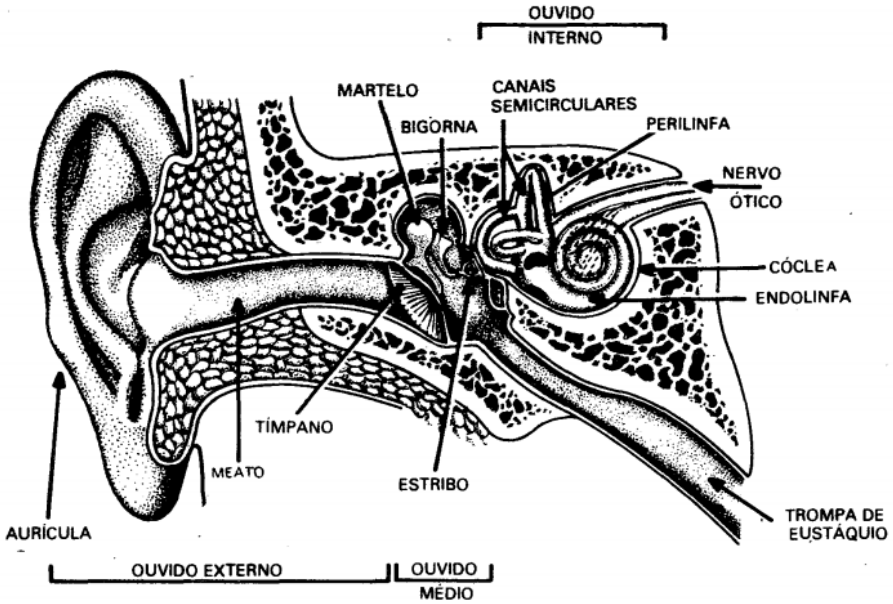

Figura 1- Anatomia do Ouvido

De acordo com Heneine (2008), o **ouvido externo** tem a função de captação e condução do som, o **ouvido médio** tem a função de transformar a energia sonora em deslocamento mecânico e o **ouvido interno** faz a análise da frequência do som recebido.

O mecanismo da audição humana é apresentado sucintamente da seguinte forma:

> As ondas sonoras entram no ouvido externo, onde são canalizadas para o tímpano e causam a vibração. Três ossos minúsculos no ouvido médio fazem uma ligação mecânica do tímpano com a cóclea. [...] Esses ossos passam a vibração do tímpano para um fluido dento da cóclea. A cóclea tem milhares de células ciliadas, que são como cabelos minúsculos e oscilam com o fluido. Os cílios perto da entrada da cóclea são estimulados por frequências altas e os cílios perto da ponta são estimulados por frequências baixas. Os movimentos desses cílios ativam as células nervosas, que mandam os sinais ao longo de vários caminhos neurais ao cérebro, onde esses sinais são interpretados como som. (ANTON & RORRES, 2012, p. 693-694).

As ondas sonoras que chegam ao nosso ouvido externo precisam ser captadas, transformadas e distribuídas com o mínimo de perda possível, e, nesse sentido que:

> Um dos problemas fundamentais do aparelho auditivo é transmitir as ondas sonoras do ar para o líquido do ouvido interno, permitindo assim que se processe a

> transdução de energia mecânica em elétrica. A grande diferença de densidade entre esses dois meios (ar e água) representa uma grande barreira à propagação do som. A maior parte (99,9%) da energia de uma onda sonora que trafega no ar é refletida, quando essa onda encontra a superfície de separação ar-água. Apenas 0,1% da energia incidente sofre refração. Dessa forma, a primeira tarefa do ouvido é permitir que a energia da onda sonora chegue até a cóclea com um mínimo de perda. (GARCIA, 2002, P. 122)

Perda esta, que está relacionada à aproximação pelo método de mínimos quadrados, na intenção de que quanto melhor for à aproximação encontrada, menor será a perda de energia da onda que chegará até a cóclea, o que resultará em uma audição mais precisa e fiel ao som propagado.

Segundo Halliday & Resnick (2011), uma onda sonora pode ser descrita como a vibração das moléculas existentes no ar na mesma direção do som, conhecida, então, por onda longitudinal. E, complementar a isso:

> [...] as ondas sonoras são variações no tempo da pressão do ar. Para o sistema auditivo, o tipo mais elementar de onda sonora é uma variação senoidal da pressão do ar. Este tipo de onda sonora estimula os cílios da cóclea de tal maneira que produz um impulso nervoso ao longo de um único caminho neural. [...] Para ser percebida como um som, uma onda senoidal precisa ter frequências num certo intervalo. Para os humanos, esse intervalo é de aproximadamente 20 a 20.000 ciclos por segundo (cps). As frequências fora desse intervalo não estimulam suficientemente os cílios dentro da cóclea a ponto de produzir sinais nervosos. (ANTON &RORRES, 2012, p. 694).

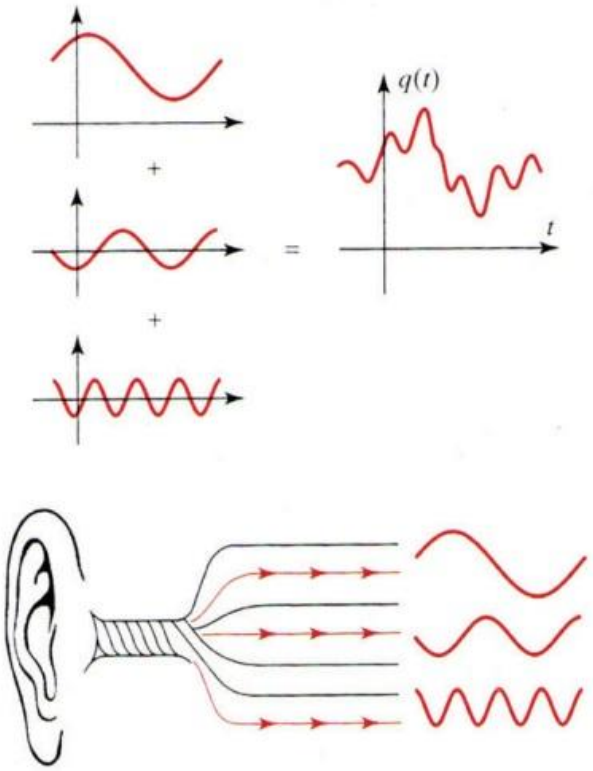

Figura 2- Diferentes formas de ondas e a resposta do ouvido

Comparando o ouvido a um sistema linear, podemos dizer que uma onda sonora complexa (soma finita de ondas senoidais) e uma onda senoidal tem a mesma resposta do

ouvido, isto é, os impulsos nervosos estimulados pelas duas ondas seguem os mesmos caminhos neurais. Apresentamos modelos das diferentes ondas senoidais, conforme a Fig. 2 (disponível em **Um modelo de mínimos quadrados para a audição humana.** Monografia de Especialização em Matemática. Publicada em 15/12/2005 pela Universidade Federal de Minas Gerais).

3. MINICURSO: UM CONTRATO DIDÁTICO

O presente minicurso traz como proposta metodológica o estudo e a aplicabilidade de conteúdos desenvolvidos nos componentes curriculares de Álgebra Linear, Geometria Analítica, Cálculo Diferencial e Cálculo Numérico.

Para o desenvolvimento das atividades no minicurso, pretende-se motivar os participantes a compartilhar as discussões e as reflexões acerca de conhecimentos básicos relacionados ao método de Mínimos Quadrados, utilizando o cálculo dos coeficientes de Fourier, por estar intimamente relacionado à projeção ortogonal.

Durante o evento, será disponibilizada uma apostila aos membros, contendo os principais conhecimentos que nortearão as ideias, esta se apresentará em formato virtual e, endereço a ser definido.

É importante salientarmos que – conforme a proposta de estudo do minicurso, para a aplicabilidade dos conteúdos supracitados – há necessidade dos participantes terem como pré-requisito os conhecimentos referentes à: espaços vetoriais Euclidianos; espaços vetoriais arbitrários; espaços com produto interno, principalmente Ajuste de Mínimos Quadrados e Aproximação funcional; integração e técnicas de integração. Desta forma, seria interessante que os alunos interessados em fazer o minicurso tenham cursado, pelo menos, componentes curriculares como Geometria Analítica, Cálculo I e II e Álgebra Linear.

Num *primeiro momento*, haverá uma breve apresentação dos organizadores do minicurso e na sequência, serão informados em relação aos objetivos do evento, a justificativa da escolha do tema e a proposta de apresentação dos conteúdos fundamentais para a aplicação.

No *segundo momento*, serão trabalhados a definição de espaços vetoriais, tais como a normalização, o produto escalar e as relações com a geometria, a ortogonalidade vetoriais e a projeção vetorial em $\mathbb{R}^n$, a geometria de sistemas lineares, o produto vetorial, apresentando exemplos em C[a,b].

Como *terceiro momento*, o grupo (re)tomará discussões referente a definição de espaços com produto interno, ângulos e ortogonalidade nestes espaços, o processo de Gram-Schmidt – convertendo uma base ortogonal em uma base ortonormal – e o polinômio de Legendre, utilizando exemplos no espaço C[a, b].

Para *quarto momento*, apresentaremos o método dos Mínimos Quadrados – como uma aplicação do problema para "achar soluções" de um sistema inconsistente –, ajustes dos mínimos quadrados, definição de polinômios trigonométricos e apresentação da relação entre a aproximação dos mínimos quadrados e Série de Fourier como uma técnica de ajuste de dados para obtenção de aproximações de funções complexas por funções mais simples – de fácil resolução.

Por último, num *quinto momento*, será desenvolvida a aplicação[2] "um modelo de mínimos quadrados para a audição humana", utilizando os conhecimentos aplicados anteriormente.

As atividades serão trabalhas num intervalo de 4h e serão usados durante o minicurso, materiais como: projetor de tela, tela para a projeção, quadro branco (ou verde), canetas coloridas para quadro branco (ou giz colorido para quadro verde). Os participantes deverão ter

[2] Seção 10.19 (ANTON & RORRES, 2012, p. 693-699)

um notebook (ou tablet) para a leitura da apostila, um bloco e/ou folhas A4 para anotações, assim como, caneta, lapiseira e borracha.

4. RESULTADOS ESPERADOS

Por meio do minicurso, esperamos que os participantes interajam com os organizadores e, no decorrer da realização das atividades propostas, sintam-se motivados, compreendendo a importância de aprender, estudar, compreender, refletir e aprofundar os conhecimentos matemáticos relacionados à: vetores, espaços vetoriais e projeções ortogonais em C[a, b], técnicas de integração, ajustes de Mínimos Quadrados, bem como, Série de Fourier.

Que a aplicação da Álgebra Linear, desenvolvida no minicurso, contribua para desenvolver nos participantes a percepção investigativa a partir das discussões e reflexões entre estes e os responsáveis pelo evento, permitindo que tornem-se agente de sua aprendizagem.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Consideramos um desafio aplicar o método de Mínimos Quadrados e a Série de Fourier em problemas contextualizados, relacionados a outras áreas do saber, por exigir que os envolvidos tenham um conhecimento amplo e aprofundado em Álgebra Linear, bem como, de Geometria Analítica e Cálculo Diferencial e Integral.

A proposta de minicurso, focando principalmente estes conhecimentos, no contexto do aparelho auditivo, motivará os participantes e esperamos que estes sociabilizem as reflexões e discussões, bem como, possam utilizá-los em outras aplicações semelhantes.

A apresentação e resolução das atividades, assim como, a atuação dos participantes e dos organizadores do minicurso, serão avaliados e analisados, o qual, os resultados poderão ser apresentados em outros eventos desta natureza.

REFERENCIAS

ANTON, H.A.; RORRES, C. **Álgebra Linear com aplicações**. Porto Alegre: Bookman, 2012.

ARRUDA, D.N. de. **Um modelo de mínimos quadrados para a audição humana.** 15/12/2005. Monografia (Especialização em Matemática) - Programa de Pós Graduação em Matemática, Universidade Federal de Minas Gerais.

FIGUEIREDO, D.G.de. **Análise de Fourier e equações diferenciais parciais.** Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

GARCIA, E.A.C. **Biofísica.** São Paulo: Sarvier, 2002.

HALLIDAY, D.; RESNICK, J.W. **Fundamentos de física.** v. 2. Rio de Janeiro: LTC, 2011.

HENEINE, I.F. **Biofísica Básica**. Rio de Janeiro: Atheneu, 2008.

IÓRIO, V. **EDP: Um curso de Graduação.** Rio de Janeiro: IMPA, 2007.