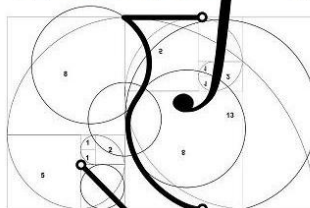


# XX EREMAT SUL

Encontro Regional  
de Estudantes de  
Matemática da Região Sul



## OFICINA DE ENSINO DE TRIGONOMETRIA PARA A EDUCAÇÃO BÁSICA – CONSTRUÇÃO E ANÁLISE DE MATERIAIS

**Rita de Cassia de Souza Soares Ramos** – rita.ramos@ufpel.edu.br

Universidade Federal de Pelotas – UFPel, Rua Benjamin Constant, 989, 96000-000 – Pelotas,  
RS, Brasil

**Lidiane Maciel Pereira** – lidiimaciel@gmail.com

Universidade Federal de Pelotas – UFPel, Rua Benjamin Constant, 989, 96000-000 – Pelotas,  
RS, Brasil

**Samara Melo Gai** – samaramelogai@gmail.com

Universidade Federal de Pelotas – UFPel, Rua Benjamin Constant, 989, 96000-000 – Pelotas,  
RS, Brasil

**Amalia Gislaíne Prates Heberle** – gislaine.heberle380@gmail.com

Universidade Federal de Pelotas – UFPel, Rua Benjamin Constant, 989, 96000-000 – Pelotas,  
RS, Brasil

**Resumo.** *O presente minicurso discute uma proposta didática envolvendo a construção de materiais manipulativos de trigonometria para a Educação Básica, bem como a resolução de problemas a partir dos conceitos trabalhados com tais materiais.*

*A abordagem inclui o debate acerca da aprendizagem da trigonometria no triângulo retângulo e no ciclo trigonométrico, a construção de materiais e a aplicação de atividades referentes aos mesmos.*

*A sugestão inclui, dentre outros recursos, a construção de dois tipos de teodolito, material para a redução ao primeiro quadrante, ciclo trigonométrico, pêndulo. Também serão disponibilizados problemas e desafios que envolvem a aplicação de conceitos trigonométricos. O público alvo deste minicurso são alunos da Licenciatura em Matemática, professores de Matemática da Educação Básica e demais pessoas interessadas em discutir o ensino e a aprendizagem de trigonometria com o uso de materiais manipulativos.*

*A proposta está de acordo com as ideias estudadas no GEPAM – Grupo de Estudo e Iniciação à Pesquisa na Área de Matemática da UFPel que, dentre outras atividades, promove oficinas para a divulgação de meios de ensino e aprendizagem de Matemática na Educação Básica.*

*A avaliação do minicurso será feita através de questionário específico e analisada segundo a Análise Textual Discursiva.*

**Palavras Chave:** *Educação Matemática, Trigonometria, Laboratório de Matemática.*

## **1. INTRODUÇÃO**

O Grupo de Estudos e Iniciação à Pesquisa na Área da Matemática (GEPAM) é formado por professores e alunos dos cursos de Licenciatura em Matemática nas modalidades a distância presencial da Universidade Federal de Pelotas (UFPel), por membros da comunidade que se interessem em estudar assuntos referentes à Educação Matemática e à Matemática. O GEPAM é vinculado ao Laboratório Multilinguagens da UFPel (LAM), que por sua vez é um subprojeto do LIFE/CAPES – Programa de Apoio a Laboratórios Interdisciplinares de Formação de Educadores. Além dos grupos constituídos nos polos, o LAM conta um grupo na sede, em Pelotas, que atua na sala destinada ao LAM, tanto com oficinas quanto com as reuniões periódicas do grupo, e ainda de forma virtual através do Portal Laboratório Virtual Multilinguagens (LVM).

Uma das propostas do GEPAM é a discussão do ensino a partir de atividades de Laboratório de Matemática, compreendendo tanto a busca e construção dos mesmos quanto a aplicação e gravação de vídeos com a utilização e possíveis variações dos materiais, mediante o LVM. Concernente a essa discussão está o desenvolvimento de oficinas que promovam a divulgação do material, para públicos variados, e a análise da percepção destes grupos a respeito dos materiais propostos.

O uso de materiais instrucionais digitais e não digitais é amplamente divulgado no meio acadêmico, no entanto, vale dizer que diferentes abordagens são dadas aos mesmos conforme sua utilização. A busca pelo estudo analítico do que se está promovendo vai além da construção e manipulação de materiais, pois nasce de inquietações de participantes do grupo, como, por exemplo, o diálogo necessário entre professores de áreas afins para a maior compreensão de conceitos interdisciplinares. Exemplifica-se a noção de seno, que segundo determinados participantes do GEPAM, existem estudantes do Ensino Médio que não ligam o conceito de seno estudado na disciplina de Matemática com o mesmo estudado em Física.

O diálogo com professores de áreas afins que fazem uso de conceitos de trigonometria pode ser frutífero através da compreensão das aplicações desses conceitos em contextos diversificados e da promoção de a reflexão acerca de suas relações matemáticas próprias. Isso exige pequenas mudanças que podem ser graduais no desenvolvimento das sequências didáticas propostas pelos professores, como utilização de diferentes variáveis. Essa ideia é reforçada por Huanca (2006, p.68) ao afirmar que

O critério central é o da contextualização e da interdisciplinaridade, é o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático. Um exemplo claro disso pode ser observado com relação às funções. Uma parte importante da Trigonometria refere-se às funções trigonométricas e seus gráficos. Outro tema que exemplifica a relação aprendizagem de matemática com o desenvolvimento de habilidades e competências é a Trigonometria, desde que seu estudo esteja ligado às aplicações, evitando-se o investimento excessivo no cálculo algébrico das identidades e equações para enfatizar os aspectos importantes das funções trigonométricas e da análise de seus gráficos. Especialmente para o indivíduo que não prosseguirá seus estudos nas carreiras ditas exatas, o que deve ser assegurado são as aplicações da Trigonometria na resolução de problemas que envolvem as medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis, e na construção de modelos que correspondem a fenômenos periódicos.

A partir das considerações expostas este minicurso atuará em duas frentes: a construção e manipulação de materiais instrucionais não digitais e a discussão de problemas envolvendo aspectos da trigonometria.

## **2 UTILIZAÇÃO DE MATERIAIS INSTRUCIONAIS NÃO DIGITAIS NO ENSINO DE TRIGONOMETRIA**

Este minicurso visa promover a divulgação da construção de materiais instrucionais para o ensino de trigonometria, e gerar um debate produtivo acerca de sua utilização. Para tal, a seleção de conceitos e materiais utilizados foi feita a partir de discussões por alguns membros do GEPAM e pela possibilidade de construção de tais materiais de forma simples e sem custos elevados em sala de aula.

### **2.1 Algumas dificuldades e obstáculos encontrados no ensino de trigonometria**

Embora a identidade da escola venha se constituindo e reconstituindo com a transformação de seus sujeitos, algumas inquietações são recorrentes, desta forma, as problematizações necessitam de recursos ainda não utilizados, bem como de análise dos fazeres que devem ser levados em consideração para a possível mudança desse panorama.

Costa (1997, p.75) suporta que obstáculos históricos que vão além da escolha da metodologia escolhida para trabalhar certo conteúdo, mas estão imbricados às relações epistemológicas dos mesmos devem ser levados em consideração no ensino de trigonometria, principalmente no que se refere à passagem do estudo no triângulo para o ciclo trigonométrico e posterior estudo de funções.

Notamos que a preocupação no ensino tradicional brasileiro está no estudo quantitativo de funções. Neste sentido direciona-se para a atribuição de valores do domínio e cálculo da imagem correspondente. Dificilmente são feitas análises enfocando só os aspectos qualitativos das funções, principalmente das trigonométricas. Isto pode provocar um obstáculo didático, pois o ciclo tem uma forte ligação com o movimento que, até o fim da Idade Média, era estudado apenas qualitativamente. Essa informação histórica, em geral, não é levada em conta quando ensinamos este assunto. (1997, p. 75).

Mota, Jucá e Pinheiro (2013, p. 6), apontam algumas dificuldades na identificação de elementos dos triângulos e compreensão do significado das razões trigonométricas como o erro mais frequente em sua pesquisa. Os autores sugerem que professores planejem suas aulas fazendo uso de materiais concretos, problemas e desafios, pois a repetições de procedimentos levam ao domínios dos procedimentos pela memorização e não à aprendizagem. Santos e Cury (2011, p.1) afirmam que os alunos têm grandes dificuldades em trigonometria, e sugerem o uso de maquetes para a representação de situações e compreensão dos significados de conceitos envolvendo trigonometria. Huanca (2006, p.243) ressalta a necessidade de planejamento e comprometimento do professor, pois “É preciso que os professores estejam realmente comprometidos com o desenvolvimento contínuo do ensino. Sabemos que as ações dos professores podem encorajar ou desencorajar os estudantes quanto a pensar, questionar, discutir suas ideias, resolver problemas e buscar suas soluções”.

### **2.2 Uso de recursos no planejamento das aulas – um apoio possível**

Tais ações implicam uma ação reflexiva que impele o professor a diversificar suas aulas, e materiais manipuláveis podem servir de apoio à instrumentalização do professor para as abordagens que julgar necessárias. É importante ressaltar que o uso de tais recursos pode ser

de auxílio ao planejamento do professor, mas como tal, não substitui outros recursos que visam o diálogo, o registro, a resolução de problemas e a formalização destes conceitos. Segundo Santos e Cury (2011, p. 3),

O material manipulável pode ser um grande aliado nas aulas de Matemática, não substituindo o professor, mas complementando suas aulas. Para que seu uso possa, efetivamente, trazer benefícios ao o processo de ensino e aprendizagem, é necessário que sejam feitas experiências com determinados materiais, construídos especificamente para determinado conteúdo, de forma que o relato dos resultados seja disponibilizado para os professores que com ele se propõem a trabalhar.

Desta forma, propõe-se que os professores façam análises da aprendizagem de seus alunos constantemente, a partir da fala dos mesmos nas discussões de sala, bem como dos diversos recursos utilizados para a comunicação e *feedback* dado pelo professor, para que possam promover a aprendizagem através do ensino diversificado. Sugere-se também o uso de recursos digitais para apoiar as atividades, principalmente no que toca à manipulação que necessita de visualização de movimento, relacionando as inserções de variáveis e valores com os resultados encontrados nos passos de determinados materiais digitais.

Huanca (2006, p.67) corrobora com essa ideia ao afirmar que

Quanto ao caráter instrumental da Matemática no Ensino Médio, o aluno deve vê-la como um conjunto de técnicas e estratégias para serem aplicadas em outras áreas do conhecimento. Todavia, a Matemática, no Ensino Médio, não possui apenas o caráter de formação ou instrumental mas, também deve ser vista como ciência, com suas características estruturais específicas. É de extrema importância que o aluno entenda que as definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos têm a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros, utilizados para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas.

Cabe ao professor a escolha dos recursos trabalhados com seus alunos, sendo assim, enfatiza-se a necessidade de teste dos recursos e da compreensão das variáveis possíveis para ampliar o rol de questionamentos interessantes a serem feitos aos estudantes para que os mesmos possam construir o raciocínio matemático a partir das relações encontradas.

### **2.3 Habilidades e discussões prévias à aplicação de recursos que envolvam medição**

Algumas habilidades básicas de medição, observação e registro precisam ser retomadas quando o professor se propõe a trabalhar com materiais que envolvam essas práticas, sendo assim, o planejamento deve englobar tais atividades para que não se perca o trabalho que levará a discussões específicas sobre os dados coletados. Isso não significa que intencionalmente o professor não possa deixar os alunos atuarem livremente para depois promover uma discussão sobre o uso dos instrumentos de medidas e a necessidade de padronização, tanto que tais atos sejam planejados ou que o professor possa fazer adequações ao seu delineamento de projeto de sequência didática, tendo em vista a flexibilidade dos planos. Um exemplo sobre a construção de materiais sem o anterior trabalho com as habilidades básicas de medição e contagem pode ser encontrado em Huanca (2006, p.242), que afirma a necessidade de planejamento e acompanhamento por parte do professor, exemplificando com a construção do teodolito

Na construção do teodolito, os alunos tiveram várias dúvidas, principalmente com relação ao uso do instrumento. Tanto o pesquisador quanto a professora deveriam ter

verificado a precisão de todos os instrumentos construídos, já que não queriam explicar antecipadamente seu funcionamento, objetivando aguçar a curiosidade dos alunos. Devido a isso, dois grupos construíram o teodolito de maneira imprecisa, ou seja, quando o teodolito era posicionado na vertical, a haste não ficava alinhada com o ângulo zero. No entanto, eles acreditavam ter feito de maneira correta, pois achavam que o teodolito seria usado na horizontal. Assim, quando foram medir distâncias inacessíveis no pátio da Escola e numa rua próxima à mesma, não puderam medir corretamente os ângulos. (2006, p.242)

Tais desafios nas utilizações de materiais e recursos podem servir para aprimorar a prática e promover discussões propícias em sala de aula, mediante solução dos problemas enfrentados, estimulando nos alunos a busca pela superação dos mesmos.

## 2.4 Atividades Propostas e Materiais

Para a montagem da proposta didática, foram utilizados questionamentos de participantes do GEPAM e estudos concernentes aos erros frequentes em trigonometria na Educação Básica, sendo assim, este minicurso sugere 11 recursos e a resolução de problemas que envolvam os conceitos estudados através dos mesmos.

	<b>Recurso (material não- digital)</b>	<b>Material</b>	<b>Objetivo</b>	<b>Procedimento</b>
1	Ângulos – graus e radianos	CDs antigos, barbante, isopor, cola, alfinete, tesoura ou estilete;	Representar a unidade de medida radiano na circunferência, relacionar com o comprimento da circunferência e a medida de um arco qualquer, relacionar graus e radianos.	- cortar o isopor do tamanho do CD - colar o isopor no CD - fixar o alfinete no centro do CD - amarrar o barbante ao alfinete - medir o comprimento do raio com o barbante - marcar o arco que mede o mesmo que o comprimento do barbante
2	Construção de triângulos semelhantes e medição de sombras	régua, tesoura, folhas coloridas, tubo de cola, caneta hidrocor, lanterna;	Entender que as razões trigonométricas dependem do ângulo, para diferentes triângulos semelhantes.	- desenhar triângulos retângulos com medidas de ângulos predefinidas - cortar tais triângulos em folha colorida - calcular as razões trigonométricas - colar os triângulos

Os materiais utilizados podem ser adquiridos com relativa facilidade e utilizados nas mais diversas realidades. Sugerimos algumas variações para alguns recursos, conforme disponibilidade da comunidade escolar. Vale dizer que a construção destes materiais não representa novidade, mas o objetivo do minicurso é divulgar tal compilação para promover a discussão do uso de materiais não instrucionais (neste item chamado de recursos para não confundir com os “ingredientes” para a construção dos mesmos).

3	Soma de ângulos internos de figuras planas	régua, tesoura, folhas coloridas, tubo de cola, caneta hidrocor;	Estabelecer a relação entre o número de lados e a soma dos ângulos internos de um polígono.	<ul style="list-style-type: none"> <li>- desenhar e recortar alguns polígonos especificados</li> <li>- pintar e rasgar as “pontas” das figuras</li> <li>- colar em papel sulfite</li> </ul>
4	Teorema de Pitágoras	folha quadriculada, tesoura, tubo de cola, lápis de cor, cartolina, régua;	Ilustrar a relação do Teorema de Pitágoras mediante demonstração por semelhança de triângulos e por pintura de folha quadriculada.	<ul style="list-style-type: none"> <li>- desenhar e relacionar os quadrados construídos sobre os lados de um triângulo retângulo em uma folha quadriculada</li> <li>- desenhar um triângulo retângulo em folha colorida e recortar dois triângulos internos a estes, que sejam semelhantes, e proceder as relações de semelhança</li> </ul>
5	Tabela de Razões Trigonométricas	calculadora simples, régua, transferidor, papel pardo;	Construir uma tabela de razões trigonométricas a partir das medidas de triângulos desenhados.	<ul style="list-style-type: none"> <li>- desenhar triângulos predefinidos</li> <li>- calcular as razões trigonométricas solicitadas</li> <li>- construir uma tabela coletiva</li> </ul>
6	Teodolito 1	canudo de refrigerante, transferidor, barbante, régua, tesoura, tubo de cola, papelão, copo com tampa ou pote plástico com tampa;	Resolver problemas envolvendo trigonometria a partir de situações práticas, envolvendo problemas de observação de medidas de ângulos na horizontal e vertical.	<ul style="list-style-type: none"> <li>- colar a tampa do copo no transferidor copiado, colado no papelão</li> <li>- marcar o ponto e colar o canudo no copo</li> </ul>

7	Teodolito 2	canudo de refrigerante, transferidor, barbante, régua, tesoura, tubo de cola, papelão, pedra, compasso;	Resolver problemas envolvendo trigonometria a partir de situações práticas, envolvendo problemas de observação de medidas de ângulos na vertical.	- colar o canudo no lado do transferidor colado no papelão, amarrar o barbante com a pedra no zero do transferidor
8	Redução ao Primeiro Quadrante	cola, tesoura, papel colorido, compasso;	Identificar ângulos complementares, suplementares e replementares e as relações entre suas razões trigonométricas no ciclo trigonométrico.	-- recortar círculos de papel - dobrar conforme os ângulos representados - colar em uma folha e estabelecer relações conforme desenhos específicos
9	Ciclo Trigonométrico	papelão, papel milimetrado, régua, tesoura, tubo de cola, compasso, barbante, colchete;	Identificar as relações trigonométricas no ciclo, relacionando arcos, quadrantes, e razões trigonométricas a partir de medição e contagem.	- colar folha grande papel milimetrado em papelão - marcar circunferência de 10 cm de raio, com os eixos desenhados - pregar com colchete barbante no centro da circunferência - proceder demais marcações
10	Pêndulo	suporte, barbante, seringa, sabão em pó, folha colorida;	Ilustrar um esboço de curva periódica.	- em um suporte no formato de balanço escolar, amarrar seringa contendo sabão em pó
11	Problemas	folhas contendo problemas que envolvam conceitos de trigonometria;	Resolver problemas fazendo uso do repertório de trigonometria do aluno.	- diversos problemas de aplicações de conceitos de trigonometria

12	Lei dos senos e Lei dos Cossenos	régua, tesoura, cartolina, hidrocor.	Ilustrar a lei dos senos e dos cossenos a partir de representação geométrica e algébrica.	- desenhar um triângulo em folha colorida e recortar dois triângulos internos a estes, que sejam semelhantes, e proceder as relações de semelhança
----	----------------------------------	--------------------------------------	---	--

Tabela 1 – proposta de construção de materiais para o apoio ao ensino de trigonometria

Klein e Costa (2008, p.1), corroboram com a inserção de materiais não digitais no ensino de trigonometria, sugerindo uma análise dos conceitos prévios dos estudantes para a intervenção do professor. Segundo as autoras,

o estudo da trigonometria é pouco explorado dentro do cotidiano do aluno. Na maioria das vezes, recordam-se fórmulas e exigem-se memorizações de relações sem qualquer sentido ou significado (BRIGUENTI, 2007; CAMARGO, 2004), vindo de encontro às orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNEM, 1998): o professor necessita considerar que os alunos não são tabula rasa e possuem concepções equivocadas sobre determinado assunto e não é num curto espaço de tempo que conseguirá fazer com que alterem essas concepções. Essas constatações exigem uma mudança de postura frente aos processos de ensino e de aprendizagem. É necessário investigar sobre a maneira como o aluno aprende determinado conteúdo, analisar suas dificuldades, consultar quais são as suas necessidades e sintonizar o conteúdo com a prática. (2008, p.1)

A reflexão do professor acerca de sua prática, e dos processos de ensino e aprendizagem apresentados aos estudantes necessita que as ideias dos alunos sejam consideradas, e que haja um sentimento de pertencimento do aluno à construção de sua aprendizagem. Quando o estudante se envolve na produção dos materiais e tem suas considerações levadas em conta na proposição dos conceitos e no estabelecimento de relações matemáticas do grupo, o professor tem a oportunidade de avaliar a aprendizagem deste aluno de forma a intervir na sua trajetória.

No caso da trigonometria, os conceitos envolvidos resumem ideias estudadas ao longo da caminhada acadêmica do aluno, reunindo aspectos de geometria plana, geometria analítica, álgebra e outras relações que fazem parte do repertório deste estudante, e que precisam ser observadas com acuro para que o mesmo possa estabelecer relações entre elas. Além das capacidades citadas, as habilidades de manipulação de material precisam ser trabalhadas quando se faz uso de recursos de observação, medição e contagem, a fim de proporcionar ao estudante maior engajamento na construção de seu conhecimento.

### 3. CONCLUSÃO

As inquietações promovidas pelas discussões entre alguns participantes do GEPAM da UFPel a respeito do ensino de trigonometria levaram à ideia de construção de uma oficina que promovesse a construção, manipulação e discussão do uso de materiais não digitais para a instrumentalização de professores da rede e estudantes de Licenciatura em Matemática. A compilação desses materiais foi realizada a partir de propostas vivenciadas por professores e registradas em cursos, eventos, livros e outros locais de pesquisa. Foram trazidos 11 recursos para a construção mais uma lista de problemas concernentes ao estudo de trigonometria na



Educação Básica. A proposta deste minicurso envolve a construção destes materiais e a divulgação dos mesmos entre a comunidade acadêmica envolvida.

Levou-se em consideração também os obstáculos e desafios presentes na literatura, e a discussão perpassa essas ideias de possibilidade do fazer diferente para os sujeitos em transformação, ainda que tais materiais sejam de uso comum em muitos lugares. A provocação de promover as relações matemáticas com o uso destes recursos, de discutir ideias matematicamente e de contextualizar conceitos de outras áreas a partir da reflexão e identificação do uso dos conceitos matemáticos nas mesmas levou os participantes do GEPAM da sede a considerar a importância deste minicurso para a formação docente.

### ***Agradecimentos***

Aos participantes do GEPAM/LAM/LIFE/UFPeL.

À UFPeL por promover através dos projetos de ensino a possibilidade da atuação do LAM no polo, bem como mediante as bolsas de estudo que permitem a articulação do GEPAM.

À CAPES pelo financiamento do GEPAM através do LIFE, e pelo financiamento do CLMD através da UAB.

### **REFERÊNCIAS**

COSTA, N. M. L. **Funções seno e cosseno: uma sequência de ensino a partir dos contextos do “mundo experimental” e do computador.** 1997, 250 fl. Dissertação. (Mestrado em Ensino da Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

HUANCA, R. R. H. **A resolução de problemas no processo ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática na e além da sala de aula.** 2006, 253 fl. Dissertação. (Mestrado em Educação Matemática). Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista.

KLEIN, M. E. Z.; COSTA, S. S. C. O ensino da trigonometria subsidiado pelas teorias dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud e da Aprendizagem Significativa de David Ausubel. In: **III MOSTRA DE PESQUISA DA PÓS-GRADUAÇÃO.** Porto Alegre, 2008, **Anais da III Mostra de Pesquisa da Pós-Graduação.** Porto Alegre: PUCRS. 2008.

MOTA, T. B.; JUCÁ, R. S.; PINHEIRO, C.A.M. Uma análise de erros nas relações trigonométricas no triângulo retângulo. In: **XI ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA.** PUCPR. Curitiba, 18 a 31 jul. 2013.

SANTOS, D. C.; CURY, H. N. O uso de materiais manipuláveis como ferramenta na resolução de problemas trigonométricos. **VIDYA**, v. 31, n. 1, p. 49-61, jan./jun., 2011 - Santa Maria, 2011