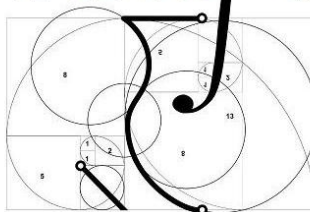


# XX EREMAT SUL

Encontro Regional  
de Estudantes de  
Matemática da Região Sul



## A CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS REAIS NO ENSINO MÉDIO: ALGUMAS PROPOSTAS E REFLEXÕES

**Ana Carla Ferreira Nicola Gomes** – anagomes.mat@gmail.com

Instituto Federal Farroupilha, Câmpus Alegrete, RS-377 Km 27 - Passo Novo, CEP 97555-000 – Alegrete, RS, Brasil.

**Mariely Rodrigues Anger** – marielyanger@hotmail.com

Instituto Federal Farroupilha, Câmpus Alegrete, RS-377 Km 27 - Passo Novo, CEP 97555-000 – Alegrete, RS, Brasil.

**Gabriel de Oliveira Soares**-gobigabriel@hotmail.com

Instituto Federal Farroupilha, Câmpus Alegrete, RS-377 Km 27 - Passo Novo, CEP 97555-000 – Alegrete, RS, Brasil.

**Marcia Viaro Flores** – marcia.flores@iffarroupilha.edu.br

Instituto Federal Farroupilha, Câmpus Alegrete, RS-377 Km 27 - Passo Novo, CEP 97555-000 – Alegrete, RS, Brasil.

**Resumo.** *Este trabalho relata uma das oficinas do projeto de pesquisa “Uma abordagem possível de noções de Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio”, no qual pretendemos desenvolver atividades para a inserção de tópicos de cálculo no ensino médio. Uma das primeiras ações deste projeto foi investigar as noções do infinito matemático de uma turma de terceiro ano do Curso Técnico em Informática Integrado ao Ensino Médio, do IF Farroupilha – Câmpus Alegrete, para que, partindo das concepções destes alunos, possamos elaborar um material didático referente à ideia intuitiva de infinito. Utilizamos no projeto a metodologia da pesquisa-ação a qual envolve a ação dos pesquisadores e dos grupos interessados. Após a fase inicial, que foi a coleta de dados realizada através de um questionário, onde os alunos dissertaram sobre a sua noção do infinito matemático, categorizou-se essas diferentes noções para, tendo isso como base, elaborar um material didático com atividades investigativas que foi aplicado nessa turma do ensino médio. O presente trabalho abordará os resultados obtidos da aplicação dessa oficina, trazendo questões inquietantes sobre o modo como os estudantes entendem a construção dos números reais. Através dos resultados obtidos, percebemos que esse entendimento não é claro e precisa ser ressignificado.*

**Palavras-chave:** *Pesquisa-ação, Noções de cálculo, Ensino médio, Infinito.*

## 1. INTRODUÇÃO

Existe um consenso entre a maioria dos estudantes de graduação que cursam a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, que esta não é uma matéria fácil e depende de muito estudo. Este componente curricular está presente em vários cursos, principalmente nas graduações da área das ciências exatas, engenharias e das tecnologias. Nesta perspectiva, Ávila (1991, p.2) é certo quando afirma que “O Cálculo vem desempenhando um papel de grande relevância em todo o desenvolvimento científico-tecnológico.”.

Entretanto, são preocupantes os altos índices de desistência e evasão nos cursos que contam com essa disciplina. Segundo Palis (1995), estes índices já seriam mais do que suficientes para apontar que é preciso buscar alternativas de ação pedagógica que, aliadas a outras medidas, buscassem soluções para esse problema.

Assim, surge no Instituto Federal Farroupilha (IFFarroupilha) – Câmpus Alegrete, a vontade e motivação de aprofundar-se sobre esse tema tão relevante e preocupante, buscando alternativas para melhorar a realidade encontrada. Vale destacar o grande incentivo à pesquisa dado por esta instituição de ensino, podendo ser verificado no Plano de Desenvolvimento Institucional do IFFarroupilha (2009, p.83), onde é ressaltado que a criação, o desenvolvimento e a consolidação de grupos e de linhas de pesquisa que expressem a dinamicidade das ações entre pesquisadores e estudantes devem ser amplamente incentivados.

Portanto, através da motivação do grupo pesquisador e do incentivo dado pelo IFFarroupilha, surge o projeto de pesquisa intitulado “Uma abordagem possível de noções de Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio”, que visa a elaboração de materiais didáticos para uma proposta de ensino de noções de Cálculo Diferencial e Integral voltados para o ensino médio.

A primeira abordagem do projeto teve como tema o infinito matemático, sendo o objetivo principal lembrar algumas noções desse conceito, que já foram apresentadas aos alunos, para assim construir uma noção mais ampla e correta. Pereira (2009) afirma que existem dentro do conteúdo programático do ensino médio, resultados vindos diretamente do Cálculo, e que o que se pretende trabalhar são esses resultados, a fim de preparar esses alunos para que se houver a necessidade de cursar esta disciplina, eles estejam mais preparados e assim, consigam alcançar melhores resultados.

Quanto à metodologia do projeto, é utilizada como base a teoria da pesquisa-ação, por acreditarmos que ao mesmo tempo em que elaboramos uma proposta de material didático, para o ensino de noções Cálculo Diferencial e Integral, estamos construindo nosso próprio conhecimento junto aos alunos. Tripp (2005) acredita que a pesquisa-ação precisa ter algumas metas delimitadas, dessas a principal é que o interesse do pesquisado e do pesquisador seja o mesmo, onde os pesquisados são os protagonistas da pesquisa e devem ter papel ativo construindo e compartilhando conhecimentos.

Dentro desta perspectiva, foi elaborado um material utilizando-se da metodologia das atividades investigativas, onde o propósito foi trabalhar com a noção de infinito matemático, passando primeiramente por tópicos relacionados à construção dos conjuntos numéricos, adentrando posteriormente no trabalho com as noções de infinito. Porém, podem perceber-se diversas lacunas nos tópicos relacionados aos conjuntos numéricos, sendo necessário trabalhar e lembrar alguns destes conceitos.

Logo, este trabalho traz os resultados obtidos através dessa primeira etapa da pesquisa, trazendo uma reflexão sobre a construção do material didático e principalmente sobre os resultados que foram obtidos após essa abordagem.

## **2. APORTE TEÓRICO**

### **A construção dos números como problemática do ensino da matemática**

A construção dos números reais é historicamente uma problemática tanto do ponto de vista formal da matemática, quanto do ponto de vista do ensino. Aliás, a incitação para a construção dos números surge inicialmente de um grande problema, chegando a ser uma grande crise na matemática. Cezar (2011) sugere que essa crise surge quando descobriu-se que dois segmentos nem sempre são comensuráveis, como por exemplo o lado do quadrado e sua diagonal.

Após isso, outras grandes constatações inquietantes na geometria foram feitas pelos pitagóricos, sendo que todas elas levavam a crer que os conjuntos numéricos existentes não eram suficientes para explicar suas descobertas. Porém, por um grande período de tempo, esses conceitos matemáticos ficaram nebulosos.

Um dos matemáticos mais conhecidos que enfim axiomatizou esses conceitos foi Dedekind por volta de 1858. Segundo Boyer (2010), Dedekind se voltou para o problema dos números irracionais enquanto dava aulas de Cálculo. Ele concluiu que para que ficasse de uma forma matematicamente rigorosa o conceito de limite deveria ser representado sem o uso da geometria, somente através da aritmética.

Apesar de esses conceitos estarem entrelaçados em todo o decorrer da escola básica, o ensino deles vem sendo foco de várias discussões por causa dos obstáculos que o professor de matemática encontra ao ensinar esses tópicos. Cezar (2011, p.22) ao falar sobre os problemas no ensino desses conceitos ressalta que “muitos desses obstáculos surgiram na formulação de conceitos matemáticos, ou surgem até hoje durante o processo de ensino e aprendizagem, que acabam por dificultar a compreensão do conceito de números reais.”, o que se percebe então, é que apesar de os números reais serem trabalhados durante muito tempo, existem problemas nas construções desses conceitos o que acarreta uma grande dificuldade em trabalhar com eles.

Percebemos então que a tarefa de introduzir os conceitos numéricos não é tarefa fácil para o professor de matemática, apesar de serem tratados na maioria dos livros didáticos, o conhecimento que o professor traz da graduação deve ser avançado, para que tenha consciência de que tais afirmações são de difícil transposição para a escola básica mas mesmo assim devem ter a sua importância ressaltada pelo professor. Sobre a formalização desses conceitos:

Assim, a ideia de número existe independentemente de estarmos na escola. No entanto, é na escola que a criança inicia o processo de formalização e é nesse momento que o professor de matemática tem uma grande tarefa: orientar o aluno para que o mesmo possa produzir significados relevantes no que se refere à construção dos números reais de forma adequada e que possibilite a aprendizagem. (CEZAR, 2013, p.2).

Partindo desse referencial exposto é evidente a importância de desenvolver o pensamento sobre esse tema por parte dos professores atuantes na rede de ensino, os que trabalham na formação de professores e para alunos de graduação que explorem para que elevem seus conhecimentos sobre os números reais, afim de que não se reproduzam posteriormente conhecimentos errôneos.

### **As atividades investigativas como metodologia para a construção do conhecimento**

Existe uma preocupação dos professores de matemática em buscar formas para que o ensino de Cálculo resulte na aprendizagem dos alunos. Uma das estratégias que vem sendo

apontada por vários autores seria a inserção de tópicos de Cálculo Diferencial e Integral no ensino médio. Um desses autores é Rezende (2003) que defende:

De fato, a ausência das ideias e problemas essenciais do Cálculo no ensino básico de matemática, além de ser um contrassenso do ponto de vista da evolução histórica do conhecimento matemático, é, sem dúvida, a principal fonte dos obstáculos epistemológicos que surgem no ensino superior de Cálculo. Assim, fazer emergir o conhecimento do Cálculo do “esconderijo forçado” a que este está submetido no ensino básico é, sem dúvida, o primeiro grande passo para resolvermos efetivamente os problemas de aprendizagem no ensino superior de Cálculo. (REZENDE, 2003, p. 420).

Ancorado nas ideias desses autores, buscamos métodos adequados para a realização do projeto, por desejar não deter-se somente a elaboração do material didático, mas também propiciar a construção do conhecimento por parte do público alvo da pesquisa. Sendo assim, percebemos que a metodologia que melhor se encaixa é a pesquisa-ação, pois sua estrutura vem de acordo com a ideia principal do projeto. Segundo Gil (2010),

A pesquisa-ação difere significativamente dos outros tipos de pesquisa já considerados. Não apenas em virtude de sua flexibilidade, mas, sobre tudo, porque, além dos aspectos diferentes à pesquisa propriamente dita, envolve também a ação dos pesquisadores e dos grupos interessados, o que ocorre nos mais diversos momentos da pesquisa. (GIL, 2010, p. 151).

Esta ação fez-nos refletir sobre qual metodologia especificamente para os tópicos de matemática envolvidos seria mais adequada para as atividades, então, visto nossa necessidade, atribuímos como metodologia de ensino as atividades investigativas, pois elas apresentam benefícios que potencializam o processo de ensino e aprendizagem. Maués e Lima (2006) afirma,

Os alunos que são colocados em processos investigativos, envolvem-se com a sua aprendizagem, constroem questões, levantam hipóteses, analisam evidências e comunicam os seus resultados. Em um ambiente de ensino e aprendizagem baseado na investigação, os estudantes e os professores compartilham a responsabilidade de aprender e colaborar com a construção do conhecimento. Os professores deixam de ser os únicos a fornecerem conhecimento e os estudantes deixam de desempenhar papéis passivos de meros receptores de informação. (apud Sá et al.)

Um dos pontos que se evidencia no trabalho com atividades investigativas é sua flexibilidade, com ela conseguimos delimitar o começo das atividades, mas não temos nenhuma certeza do modo como terminará. Muitas vezes, os estudantes surpreendem-se ao trilhar caminhos não imaginados para determinada situação, fazendo com que todos reflitam de diferentes modos sobre a situação colocada. Assim obtemos um vasto rol de concepções sobre um mesmo assunto, fazendo com que a pesquisa fique rica em embasamento para a construção do material didático referente ao ensino de noções do Cálculo Diferencial e Integral.

Ainda podemos destacar o papel dos pesquisadores na aplicação das atividades, estes devem refletir previamente sobre as tarefas que serão criadas, para que estas se mostrem instigantes aos alunos e façam com que eles mobilizem diferentes conceitos para solucioná-la. De acordo com Ponte et al. (2009) a realização de uma investigação matemática envolve momentos principais, sendo um desses o de reconhecimento e exploração prévia da situação e por fim elaboração das questões a serem trabalhadas. Estes momentos traçam ao pesquisador o caminho para ele obter uma pesquisa coerente, apresentando em seu resultado conceitos

rústicos que, após serem lapidados, consolidam um trabalho democrático de grande valia de aprendizagem.

### **Uma proposta para o ensino dos conjuntos numéricos no ensino médio: resultados obtidos**

O grupo escolhido para a realização da proposta foi o terceiro ano do Curso Técnico em Informática Integrado ao Ensino Médio do Instituto Federal Farroupilha - Câmpus Alegrete. A turma 30 é atualmente composta por 16 alunos, com média de idade de 16 anos, e com interesses muito semelhantes quando se trata de escolha de um curso superior. A maioria tem intenção de cursar uma graduação nas áreas das ciências exatas e engenharias.

Sabendo do grande potencial da turma decidiu-se fazer com ela a aplicação das oficinas, seguindo a metodologia do projeto. A fase inicial foi a coleta de dados realizada através de um questionário, onde os alunos dissertaram sobre a sua noção do infinito matemático.

Percebeu-se de uma maneira geral na análise dos dados coletados diferentes noções do infinito matemático; os alunos relacionaram suas respostas com as dízimas periódicas, com a construção do conjunto dos números naturais e dos números inteiros, não mencionando os números reais.

Com isso identificamos o grande problema envolvendo essa construção, já que para um conhecimento sobre infinito teríamos de construir esses conceitos com eles. Tendo em vista essas dificuldades foi pensado um material - que parte está relatado nesse trabalho - com questões investigativas que possibilitassem a construção do conhecimento por parte dos alunos.

A primeira questão proposta aos alunos trata do conjunto dos números naturais, mais precisamente tratando de intervalos naturais, sendo pedido que analisasse quantos números existem nos intervalos e a sua localização na reta numérica. Nessa questão a maioria dos alunos não teve dificuldades, tanto para identificar a posição desses números em uma reta numérica quanto para identificar quantos números existem nos intervalos.

Tratando-se do conjunto dos números inteiros a linha de pensamento seguiu a mesma quando pedido para que os alunos representassem na reta numérica os números pertencentes ao intervalo, estes não tiveram problema algum, nem mesmo para dizer quais seriam esses números.

Nesses dois conjuntos, a falta de dúvidas mais graves é bem compreensível, os números inteiros são os primeiros que os alunos veem ainda lá no ensino fundamental, segundo Boyer (2010, p.4) “O conceito de número inteiro é o mais antigo na matemática e a sua origem se perde nas névoas da antiguidade pré-histórica.”, então, são variadas as explicações que ocasionam a maior compreensão dos alunos.

O maior problema nessas duas questões não foi encontrado no que foi pedido, na verdade, um único grupo errou a questão e esse cometeu esse equívoco por falta de entendimento sobre anotação matemática, quando escrevemos na apostila (1,5), por exemplo, os alunos não entenderam como um intervalo. É usual encontrar esses problemas até mesmo em alunos do terceiro ano do ensino médio, segundo Menezes (2004, p. 3) isso se deve “porque a linguagem matemática não se aprende a falar em casa, desde tenra idade – aprende-se, isso sim, a utilizar na escola.”

A próxima pergunta foi sobre os números racionais, entre o intervalo de 0 e 1, se eles sabiam dizer quantos números existiam nesse intervalo. Nesse quesito as respostas se dividiram, sendo que mais da metade dos grupos deram respostas corretas. Dos que erraram, um grupo deu uma resposta que não condizia com a pergunta, enquanto outro grupo deu como resposta um conjunto finito de elementos. Ainda tratando dos números racionais, quando foi

pedido que os alunos localizassem  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{2}$  e  $\frac{5}{9}$  na reta numérica, um fato interessante ocorrido foi que nenhum dos grupos o localizou assim, na forma fracionária, todos transformaram o número para a forma decimal para depois fazer a marcação, além disso, teve dois grupos que marcaram com a localização errada e um grupo que errou a marcação.

A última pergunta e que vem como fechamento dessa parte da apostila trata do conjunto dos números reais e pergunta, no intervalo entre 0 e 1, quantos números existem. Dois grupos responderam que existem infinitos números, um grupo respondeu que existia números com vírgula e outro disse que existiam vários números.

Também foi perguntado se os alunos conseguiam identificar algum número irracional nesse intervalo. Duas das respostas apontaram as dízimas periódicas, o que foi errado, outro grupo apontou  $\pi$ ; 0,23;  $\sqrt{2}$  sendo desses dois irracionais não pertencentes a aquele intervalo e um não irracional, outro grupo deu como resposta 0,1 e o último grupo declarou que não conseguiria dar essa resposta, pois era algo bem complexo.

Percebemos então que para todos os grupos, não só os que declararam, foi difícil pensar a esse respeito e para eles não foi possível achar um número irracional entre 0 e 1.

Um dos fatores mais relevantes da resolução dessa apostila por parte dos alunos foram suas conjecturas. Era perceptível na fala deles que nunca durante praticamente toda a sua formação escolar, tendo em vista que estão na metade do terceiro ano, havia sido proposto a eles que pensassem sobre os números que habitualmente usam. Isso promove nos pesquisadores (futuros docentes) uma profunda reflexão.

### 3. CONCLUSÕES

É muito gratificante para professores participar de projetos deste tipo, mas principalmente para alunos de graduação, pois estes interveem diretamente no aprendizado dos graduandos, tendo em vista que os alunos da Licenciatura em Matemática que trabalham como bolsista e voluntários desse projeto estão no momento cursando a disciplina de Análise Real, onde é feita toda a formalização desse conhecimento.

Uma das grandes inquietações que surgiu, foi como transcrever o que a professora de Análise, orientadora desse projeto, disse em aula para que se torne acessível a alunos do ensino médio entender como que foram feitas as descobertas dos números.

Percebemos que agora, teremos que trabalhar esses conceitos antes de seguir com as outras atividades previstas no projeto, pois percebemos que mesmo ao final da decorrida oficina os alunos não internalizaram essas noções e pediram em conversas posteriores que se possível fosse feita uma devolutiva dessa aplicação.

De uma maneira geral podemos afirmar que, se este projeto não fosse realizado com essa turma, essas ideias só seriam introduzidas na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral de modo conciso e de forma ampla, o que acarretaria em um obstáculo a mais na aprendizagem desses alunos.

Sem dúvidas esta experiência como formação pedagógica foi de suma importância não só para os alunos do ensino médio que participam do projeto, mas também para os futuros professores, pois com ela conseguiu-se perceber quais eram essas dificuldades que os alunos tinham, as quais se desconheciam a existência.

#### *Agradecimentos*

Não pode deixar de ser lembrado nesse texto o Programa de Apoio à Iniciação Científica no Ensino Superior do Instituto Federal Farroupilha – Câmpus Alegrete, este que torna

possível essa e outras pesquisas nessa instituição, contribuindo em grande escala para uma formação completa dos estudantes.

Para os estudantes de licenciatura especificamente, possibilita muito a aprendizagem e a se experimentar como um professor pesquisador.

Fica aqui registrado o agradecimento à instituição, pela existência desse programa e por possibilitar aos estudantes serem bolsistas de Iniciação Científica e Tecnológica do Instituto Federal Farroupilha.

## **REFERÊNCIAS**

ÁVILA, G. **O ensino de Cálculo no 2.º grau**. Revista do Professor de Matemática, n.º18. Sociedade Brasileira de Matemática, 1991.

BOYER, C.B. **História da Matemática**. 3.ed. São Paulo: BUCHER, 2010.

CEZAR, M. S. **Concepções acerca do conceito de Números Reais**: Uma breve reflexão sobre seu Ensino na Educação Básica. Monografia de Especialização em Ensino na Educação Básica. Departamento de Educação e Ciências Humanas. UFES/CEUNES. São Mateus, ES, 2011.

CEZAR, M. S. **A Produção de Significados na Construção dos Números Reais**. In: Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática, 17., Vitória: IFES/UFES, 2013.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 5ª ed. São Paulo: Atlas, 2010.

INSTITUTO FEDERAL FARROUPILHA. Pró-reitoria de Desenvolvimento Institucional. **Plano de Desenvolvimento Institucional**. Santa Maria, 2013. Disponível em <<http://www.iffarroupilha.edu.br/site/midias/arquivos/20110693620341arquivoweb.id.983.pdf>>. Acesso em: 7 out. 2014. No prelo.

MENEZES, L. **Matemática, linguagem e comunicação**. Millenium. Disponível em: <<http://www.ipv.pt/millenium/20ect3.htm>>. Acesso 27 set. 2014.

PALIS, G. R. **Computadores em Cálculo uma alternativa que não se justifica por si mesma**. Temas e Debates. Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, São Paulo, ano 8, n.6, p. 22-38, Abr. 1995.

PEREIRA, V. M. C. **Cálculo no Ensino Médio**: Uma proposta para o Problema da Variabilidade. Dissertação de Mestrado. Rio de Janeiro: Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), 2009.

PONTE, J. P. et al. **Investigações matemáticas na sala de aula**. 2ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

SÁ, E. F., et al. **As características das atividades investigativas segundo tutores e coordenadores de um curso de especialização em ensino de ciências**. Disponível em <http://www.nutes.ufrj.br/abrapec/vienpec/CR2/p820.pdf> Acesso: 02 out. 2014.

THOMAS, T. C. F. **Não gostar de matemática: que fenômeno é este?** Dissertação Mestrado em Educação. Faculdade de Educação da PUCRS. Porto Alegre, 1996.

TRIPP, D. **Pesquisa-ação:** uma introdução metodológica. Educação e Pesquisa, São Paulo, v. 31, n. 3, 2005.