XX EREMAT - Encontro Regional de Estudantes de Matemática da Região Sul
Fundação Universidade Federal do Pampa(UNIPAMPA), Bagé/RS, Brasil. 13-16 nov. 2014.
ISSN 2177-9139

RECUPERANDO O TRAÇO DE UMA CURVA UTILIZANDO INTEGRAÇÃO NUMÉRICA E O TEOREMA FUNDAMENTAL DAS CURVAS PLANAS

Vanusa Dylewski-vanusamdylewski@gmail.com
Universidade Federal de Pelotas, Pelotas-RS, Brasil
Alexandre Athayde-alexandre.athayde@ufpel.edu.br
Universidade Federal de Pelotas, Pelotas-RS, Brasil
Lisandra Sauer-lisandrasauer@gmail.com
Universidade Federal de Pelotas, Pelotas-RS, Brasil

Resumo

Neste trabalho utilizaremos a integração numérica para fazer aproximações de integrais, com o intuito de determinar o traço de uma curva, a partir de sua função curvatura. Faremos uma comparação do comportamento da curva quando é escolhido o intervalo adequado e de quando é escolhido o intervalo errado para fazer a integração. Mostraremos um algorítmo que calcule essas integrais e plote essas curvas.

Palavras chaves: Regra de Simpson; Erro; Curvatura; Curvas; Matlab.

1 INTRODUÇÃO

Em geometria diferencial estudamos curvas no plano. Um dos conceitos mais significativos deste assunto é a curvatura da curva, ou seja, dada uma curva $\alpha(s)$, a curvatura mede o quanto que $\alpha(s)$ se afasta de estar contida numa reta, ou seja, mede o quanto uma curva se dobra.

O Teorema Fundamental das Curvas Planas nos diz que a partir de uma função diferenciável $k(s)$, $s \in \mathbb{R}$, existe uma curva regular $\alpha(s)$, isto é, $\alpha'(s) \neq (0,0)$, parametrizada pelo comprimento de arco s, cuja curvatura é $k(s)$.

A demonstração do Teorema Fundamental das curvas planas nos fornece um algorítimo para dada a função curvatura, obter a parametrização da curva. Quando a curvatura é constante é fácil de saber como $\alpha(s)$ se comporta, mas mesmo quando é linear o resultado não é imediato. Em várias situações podemos obter integrais que não possuem solução analítica, no capítulo 4 trataremos deste problema.

Como teremos problemas na maioria das funções curvaturas que pegarmos, utilizaremos a Regra de Simpson para aproximar o valor da integral no intervalo e, assim determinaremos como $\alpha(s)$ se caracteriza.

Com auxílio de um software faremos essas aproximações e plotaremos a curva $\alpha(s)$ em um intervalo $[a, b]$ escolhido.

No presente trabalho iremos dar algumas noções preliminares da Regra de Simpson e do Teorema Fundamental das Curvas Planas nos capítulos 2 e 3, respectivamente. No capítulo 4, apresentaremos um programa desenvolvido, utilizando a regra de simpson, no Matlab para a partir da função curvatura obter o traço da curva.

2 REGRA DE SIMPSON

O campo da análise numérica antecede a invenção do computador em séculos. Grandes matemáticos no passado trabalharam com análise numérica, o que é percebido pelo nome de importantes algoritmos como: Método de Newton, Polinômio de Lagrange, Eliminação Gaussiana, ou Método de Euler.

As calculadoras mecânicas foram desenvolvidas como uma ferramenta para cálculos a mão. Estas calculadoras evoluíram para computadores eletrônicos nos anos 40, quando se percebeu que estes computadores seriam úteis para fins administrativos. Mas a invenção do computador também influenciou o campo da análise numérica, uma vez que cálculos maiores e mais complexos poderiam ser resolvidos sistematicamente.

Os métodos numéricos se aplicam a problemas que tem solução analítica e também a problemas que não conhecemos a solução analítica. O que fazemos com os métodos numéricos é aproximar a solução exata quando conhecemos a expressão dela ou representá-la numéricamente quando não a conhecemos.

O Método de Simpson, ou Regra de Simpson para a aproximação da integral de uma função $f(x)$ está relacionada intimamente com a interpolação da função f em um conjunto de pontos. A Regra de Simpson consiste em aproximar a função f em um intervalo $[a, b]$ por um polinômio de grau 2 que interpola, ou seja, que coincide com o valor da f nos pontos a, b e $\frac{a+b}{2}$.

Através da Fórmula de Lagrange, estabelecemos a fórmula de integração resultante da aproximação de f(x) por um polinômio p(x) de grau 2, que interpola f(x) nos pontos $x_0 = a$, $x_1 = x_0 + h$ e $x_2 = x_0 + 2h = b$, onde $h = \frac{b-a}{2}$
Consideremos o polinômio p(x) de grau 2:

$$p(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0)+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1)+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2) \quad (1)$$

$$p(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(-h)(-2h)}f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(h)(-h)}f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(2h)(h)}f(x_2) \quad (2)$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_2} p(x)dx &= \frac{f(x_0)}{2h^2}\int_{x_0}^{x_2}(x-x_1)(x-x_2)dx - \frac{f(x_1)}{h^2}\int_{x_0}^{x_2}(x-x_0)(x-x_2)dx \quad (3)\\ &+ \frac{f(x_2)}{2h^2}\int_{x_0}^{x_2}(x-x_0)(x-x_1)dx\end{aligned}$$

Resolvendo as integrais, chegamos na Regra de Simpson:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)], \text{ onde } x_1 = \frac{x_2 + x_0}{2}. \quad (4)$$

O erro dessa aproximação é dado por:

$$-\frac{h^5}{90}f^{(4)}(c), \text{ onde } c \in (x_0, x_2). \quad (5)$$

Como o termo de erro envolve uma derivada de oredem quarta, a Regra de Simpson dá resultados exatos quando aplicada em um polinômio de grau igual ou menor que 3.

Como a aproximação por um polinômio de grau 2, em geral, é insuficiente para intervalos muito grandes ou funções com muitas mudaças de sinal em sua derivada, podemos aumentar o grau do polinômio interpolador ou particionar o intervalo de integração e aplicar repetidas vezes a Regra de Simpson. A segunda opção é uma boa alternativa contanto que se tomem alguns cuidados como veremos na próxima seção.

2.1 Aplicação Múltipla da Regra de Simpson

Para n intervalos igualmente espaçados de $h = \dfrac{x_n - x_0}{n}$ unidades onde n é um número par, temos:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + ... + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx \tag{6}$$

Aplicando a Regra de Simpson em cada integral do segundo membro,

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] \quad + \quad \frac{h}{3}[f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)] + ... \tag{7}$$

$$\dots \quad + \frac{h}{3}[f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f(x_0) + 4\sum_{i=0}^{\frac{n-2}{2}} f(x_{2i+1}) + 2\sum_{i=0}^{\frac{n-4}{2}} f(x_{2i+2}) + f(x_n)] \tag{8}$$

onde,

$$\sum_{i=0}^{\frac{n-2}{2}} f(x_{2i+1}); \ \sum_{i=0}^{\frac{n-4}{2}} f(x_{2i+2}) \tag{9}$$

são, respectivamente, a soma da f aplicada no ponto médio de cada intervalo da Regra de Simpson e a soma da f aplicada no ponto final de cada intervalo que possui um intervalo subsequente.

O erro da Regra de Simpson aplicada diversas vezes é dado pela soma dos erros de cada intervalo:

$$-\frac{(x_n - x_0)h^4}{180} f^{(4)}(c), \text{ onde } c \in (x_0, x_n). \tag{10}$$

Como não sabemos o valor exato de c, podemos substituir o valor máximo de $f^{(4)}(c)$ no intervalo para super estimar o erro. Assim podemos comparar essa estimativa com o erro exato quando sabemos a expressão para a integral de $f(x)$.

Para se ter uma melhor aproximação do valor das integrais de $f(x)$ em um intervalo e, consequentemente, um erro menor, devemos diminuir o tamanho de h. Além disso, também podemos saber para que quantidade de n intervalos teremos um erro inferior a um valor ϵ.

Exemplo: Estimando o erro de $\int_0^{\frac{7\pi}{3}} \sin(x)dx$, aplicando a Regra de Simpson 2 vezes.

Sabemos que $\int_0^{\frac{7\pi}{3}} \sin(x)dx = -\cos\frac{7\pi}{3} + \cos(0) = 0,5$. Integraremos, agora pela Regra de Simpson.

Aplicando duas vezes a Regra de Simpson, teremos $n = 4$ subintervalos, cada um com tamanho $h = \dfrac{\frac{7\pi}{3} - 0}{4} = \frac{7\pi}{12}$. Assim temos:

$$\int_0^{\frac{7\pi}{3}} \sin(x)dx = \int_0^{\frac{7\pi}{6}} \sin(x) + \int_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{3}} \sin(x) \tag{11}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{7\pi}{3}} \sin(x)dx &\approx \frac{7\pi}{12.3}\left[\sin(0) + 4\sin\frac{7\pi}{6.2} + \sin\frac{7\pi}{6}\right] \\ &+ \frac{7\pi}{12.3}\left[\sin\frac{7\pi}{6} + 4\sin\frac{\frac{7\pi}{6}+\frac{7\pi}{3}}{2} + \sin\frac{7\pi}{3}\right]\end{aligned} \tag{12}$$

$$\int_0^{\frac{7\pi}{3}} \sin(x)dx \approx 0,550573806 \tag{13}$$

O erro exato dessa aproximação é $E_e = 0,550573806 - 0,5 = 0,050573806$ e a estimativa em módulo do erro é:

$$\frac{(\frac{7\pi}{3} - 0)h^4}{180} f^{(4)}(c), \text{ para algum } c \in (0, \frac{7\pi}{3}). \tag{14}$$

O maior valor que $f^{(4)}(c)$ assume é 1, quando $c = \frac{\pi}{2}$. Logo a estimativa do erro é:

$$E_{est} \leq \frac{(\frac{7\pi}{3} - 0)h^4}{180} = 0,459325778 \tag{15}$$

De fato, $0,050573806 \leq 0,459325778$.

Se aumentarmos o número de vezes que aplicamos a Regra de Simpson o erro estimado diminuirá consideravelmente.

3 TEOREMA FUNDAMENTAL DAS CURVAS PLANAS

Para enunciar o teorema fundamental das curvas planas, precisamos de algumas definições.

Definição: Seja $\alpha = (x(t), y(t))$, $t \in I$ uma curva parametrizada diferenciável. O vetor tangente à curva α no instante t é dado por: $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$.

Uma curva parametrizada diferenciável é dita *regular*, se para todo instante t , $\alpha'(t) \neq (0,0)$.

Definição: Uma curva regular α é dita *parametrizada pelo comprimento de arco (p.c.a)* se para cada instante t_0 e t_1, com $t_0 \leq t_1$, o comprimento de arco da curva de α de t_0 a t_1 é igual a $t_1 - t_0$. Isto é:

$$\int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(t)|dt = t_1 - t_0 \tag{16}$$

Definição: Considere uma curva $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ regular e p.c.a. Para cada parâmetro s, temos o *vetor tangente unitário* a α em s,denotado por: $t(s) = (x'(s), y'(s))$. Seja $n(s)$ um *vetor unitário ortogonal* a $t(s)$, obtido pela rotação de $t(s)$ em 90° no sentido antihorário, ou seja, $n(s) = (-y'(s), x'(s))$.

Os vetores $n(s)$ e $t(s)$ são chamados *referencial de Frennet* da curva α em s.

Note que:

$$|t(s)| = 1 \Rightarrow |t(s)|^2 = 1 \Rightarrow \langle t(s), t(s)\rangle = 1 \tag{17}$$

$$\frac{d}{ds}\langle t(s), t(s)\rangle = 0 \tag{18}$$

$$\langle t'(s), t(s)\rangle = 0 \Rightarrow t(s) \perp t'(s) \tag{19}$$

Como $t(s)$ é ortogonal a $n(s)$ e a curva é plana então $t'(s)$ está na mesma direção de $n(s)$. Assim ,

$$t'(s) = k(s)n(s) \tag{20}$$

O fator $k(s)$ é a variação do vetor tangente da curva α, ele é denominado *curvatura* de α em s e é determinado por:

$$k(s) = \langle \alpha''(s), n(s) \rangle \tag{21}$$

Proposição: Seja $\theta(s)$ o ângulo formado pelo vetor tangente $t(s)$ com o eixo x, marcado no sentido antihorário. A curvatura de α em s é dada por:

$$k(s) = \theta'(s) \tag{22}$$

Demonstração: De fato, considerando os vetores da base canônica no plano $\vec{i} = (1,0)$ e $\vec{j} = (0,1)$, temos:

$$t(s) = (\cos\theta(s), \sin\theta(s)) \tag{23}$$

Como $t(s)| = 1$ então a curva que possui tangente $t(s)$ é p.c.a. Temos ainda,

$$n(s) = (-\sin\theta(s), \cos\theta(s)) \tag{24}$$

e

$$t'(s) = (-\theta'(s)\sin\theta(s), \theta'(s)\cos\theta(s)) \tag{25}$$

Logo,

$$k(s) = \langle t'(s), n(s) \rangle \tag{26}$$

$$k(s) = \theta'(s)\sin^2\theta(s) + \theta'(s)\cos^2\theta(s) \tag{27}$$

Assim,

$$k(s) = \theta'(s) \tag{28}$$

c.q.d

O Teorema Fundamental das Curvas Planas garante que uma curva p.c.a é determinda essencialmente pela sua curvatura com sinal. Essencialmente significa a menos de um movimento rígido do plano.

Teorema: Dada uma função diferenciável $k(s)$, $s \in I \subset \mathbb{R}$, existe uma curva regular $\alpha(s)$ p.c.a cuja curvatura é $k(s)$.
Demonstração: Fixado um parâmetro $s_0 \in I$ e definimos para cada $s \in I$,

$$\theta(s) = \int_{s_0}^{s} k(u)du \tag{29}$$

Seja $p_0 = (x_0, y_0)$ um ponto do plano. Definimos a curva

$$\alpha(s) = (x_0 + \int_{s_0}^{s} \cos\theta(u)du,\ y_0 + \int_{s_0}^{s} \sin\theta(u)du) \tag{30}$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos que:

$$\alpha'(s) = (\cos\theta(s), \sin\theta(s)) => \|\alpha'(s)\| = 1 \tag{31}$$

Logo α é p.c.a. Então temos que $\alpha'(s)$ faz um ângulo $\theta(s)$ com o eixo x, onde $\theta'(s) = k(s)$ é a sua curvatura com sinal.

Seja agora $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ uma curva p.c.a cuja curvatura é $k(s)$. De $t'(s) = k(s)n(s)$, temos $(x''(s), y''(s)) = k(s)(-y'(s), x'(s))$, daí temos que: $x''(s) = -k(s)y'(s)$ e $y''(s) = k(s)x'(s)$. Fixados $\alpha(s_0) = p_0$ e $\alpha'(s_0) = v_0$, segue do teorema de unicidade de soluções do sistema de equações diferenciais que a curva α é única.

c.q.d

A demonstração do teorema nos fornece um algorítmo para dada a função curvatura, determinarmos a curva. Embora este algorítmo seja bastante útil, algumas integrais podem não possuir solução analítica. Com isso recorremos à integração numérica.

4 PROBLEMAS

Fixado $p_0 = (x_0, y_0)$ e $s_0 = 0$. Quando a função curvatura $k(s)$ for a, não teremos problemas na integração para achar a curva $\alpha(s)$, pois $\theta(s) = \int_0^s a du = as - a.0 = as$, logo

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= \left(x_0 + \int_0^s \cos(au)du,\ y_0 + \int_0^s \sin(au)du\right) = \\ &= \left(x_0 + \frac{1}{a}[\sin(as) - \sin(a.0)], y_0 + \frac{1}{a}[-\cos(as) + \cos(a.0)]\right) \end{aligned} \tag{32}$$

$$\alpha(s) = (x_0 + \frac{1}{a}\sin(as), y_0 + \frac{1}{a}[1 - \cos(as)] \tag{33}$$

Quando a função curvatura não for constante, as integrais podem não ser imediatas.

Seja $k(s) = 2s$ a função curvatura e $p_0 = (x_0, y_0)$ um ponto fixo.

Pelo Teorema Fundamental das Curvas Planas, temos: $\theta(s) = \int_0^s 2udu = s^2 - 0^2 = s^2$. A expressão da curva $\alpha(s)$ fica:

$$\alpha(s) = (x_0 + \int_0^s \cos(u^2)du,\ y_0 + \int_0^s \sin(u^2)du) \tag{34}$$

Essas integrais não possuem soluções imediatas, neste caso recorremos aos métodos numéricos para aproximar o valor dessas integrais e obter o traço da curva. Na próxima seção mostraremos o traço das curvas com as seguintes funções curvaturas: $k(s) = 2s$ e $k(s) = \dfrac{1}{cosh(s)}$.

4.1 Resultados

Considere a função curvatura $k(s) = 2s$ e o ponto $p_0 = (0, 0)$. Temos que $\theta(s) = s^2$. Analisando como os gráficos de $x(s)$ e $y(s)$ oscilam, podemos estimar quantas raízes teremos em um intervalo de $(0, s)$, assim podemos calcular um tamanho apropriado para o espaçamento H, o qual usaremos na Regra de Simpson com a intenção de obter uma boa aproximação.

Análise de $f(s) = \cos(s^2)$:

Como a Regra de Simpson aproxima a função f por um polinômio de grau 2, ou seja, o intervalo apresenta duas raízes, então intervalos com mais de duas raízes ficam mal aproximados e portanto a integral de f também será mal aproximada.

Sabemos que cosseno oscila entre $[-1, 1]$ para qualquer valor de s. A cada duas trocas de sinal da derivada, temos uma raíz. A derivada da função $f(s) = \cos(s^2)$ é dada por $f'(s) = -2s\sin(s^2)$ e, $f'(s)$ troca duas vezes de sinal de π em π. No intervalo de $[0, 100]$ teremos $m\pi = 100^2$ raízes. Assim teremos 3184 raízes nesse intervalo. $m = 3183$ é o múltiplo de π mais próximo de 3184 e $m = 3182$ é o segundo múltiplo mais próximo. Assim, teremos $3183\pi = {s_1}^2$ e $3182\pi = {s_0}^2$ e o tamanho de H será menor que $s_1 - s_0 = 0,015$.

Com esses dados, podemos fazer uma programa para aproximar o valor de $\theta(s)$, $x(s)$ e $y(s)$ em um intervalo $[a, b]$ e, ainda plote a curva $\alpha(s) = (x(s), y(s))$. Segue o programa:

```
function[t] = curvaturageral(a, b, H)
format long;
```

$t(1) = 0; x(1) = 0; y(1) = 0;$
$h = H/4;$
$N = (b - a)/H;$
$for\ i = 1 : 2 * N;$
$t(i+1) = t(i) + (h/3) * [curvatura(a + (2 * i - 2) * h) + 4 * (curvatura(a + (2 * i - 1) * h)) + curvatura(a + 2 * i * h)];$
end
$for\ i = 1 : N$
$x(i+1) = x(i) + (H/3) * [cos(t(2 * i - 1)) + 4 * cos(t(2 * i)) + cos(t(2 * i + 1))];$
$y(i+1) = y(i) + (H/3) * [sin(t(2 * i - 1)) + 4 * sin(t(2 * i)) + sin(t(2 * i + 1))];$
end
$plot(x, y,' g-');$

$(x_1, y_1) = (0, 0)$ é o ponto inicial da curva α.

$h = \frac{H}{4}$ é metade do intervalo em que será aplicado uma vez a Regra de Simpson para $\theta(s)$.

$2N$ é o número de vezes que será aplicado a Regra de Simpson para $\theta(s)$.

$t(i+1) = \theta(i+1)$.

H é o intervalo em que é aplicado uma vez a Regra de Simpson para $x(s)$ e $y(s)$.

N é o número de vezes que será aplicado a Regra de Simpson para $x(s)$ e $y(s)$, que será determinado a partir da escolha do intervalo $[a, b]$ e do tamanho de cada intervalo H.

A função curvatura é fornecida em um programa a parte, onde mudamos apenas a sua expressão, de forma que esse primeiro chame a função curvatura do segundo. O programa da função curvatura é:

$function f = curvatura(n)$
$f = k(n);$

Onde $k(n)$ é a função curvatura cuja curva queremos determinar.

Utilizando esse programas, faremos uma comparação de como a curva α se comportará no intervalo $[a, b]$ e o H escolhido.

4.1.1 $k(s) = 2s$

Já vimos que para a função curvatura $k(s) = 2s$, chamanda de clotóide, teremos que pegar $H \leq 0.015$ para ter uma boa aproximação para a curva $\alpha(s)$.

Na Fig.1 , temos o gráfico de $\alpha(s)$ de um intervalo de $[-50, 50]$ e $H = 0,005$ e, temos o gráfico de $\alpha(s)$ de um intervalo de $[-50, 50]$ e $H = 0,1$.

Percebemos que com $H = 0,1$ ocorre um erro no comportamento de $\alpha(s)$, pois $0,0015 \leq 0,1$.

A clotóide é muito utilizada na construção de estradas, pois varia linearmente de zero até uma constante qualquer e portanto é a curva ideal para ligar um segmento de reta a uma circunferência. Para que uma estrada permita uma condução suave, deverá preencher, pelo menos, dois requisitos essenciais: que não tenha descontinuidades na sua curvatura e na sua tangência. Numa estrada formada apenas por segmentos de reta e arcos de circunferência, o valor da curvatura varia bruscamente desde zero até um valor finito e constante. Esta descontinuidade da curvatura no ponto de união da parte reta com a parte circular é um problema grave pois, pode ser a causa de acidentes, devido à variação brusca da aceleração centrífuga que se verifica no veículo quando este inicia a sua

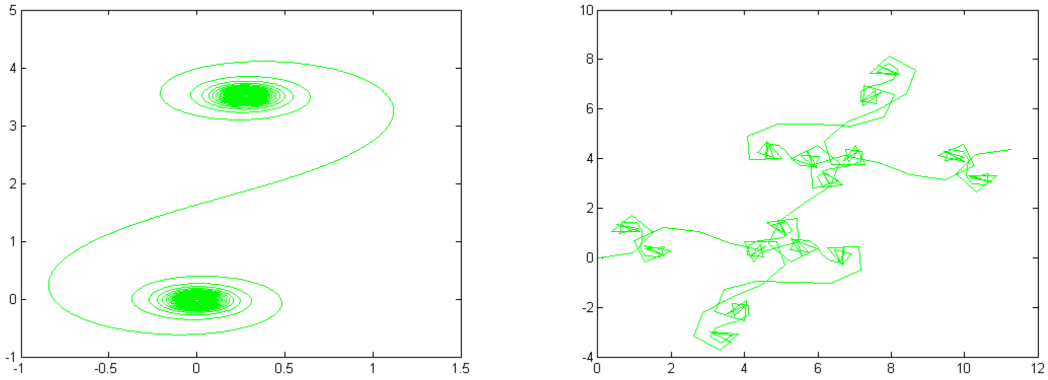

Figura 1: Figura da esquerda $k = 2s$ e $H = 0,005$. Figura da direita $k = 2s$ e $H = 0,1$

trajetória circular. Para evitar esse problema, se utiliza curvas de transição entre as trajetórias retas e circulares, a curva mais frequente é a coltóide ou espiral de cornu. Usando a clotóide existem várias configurações que respeitam a continuidade da curvatura, uma delas é "reta, clotóide, circunferência, clotóide, reta"e está representada na Fig.2.

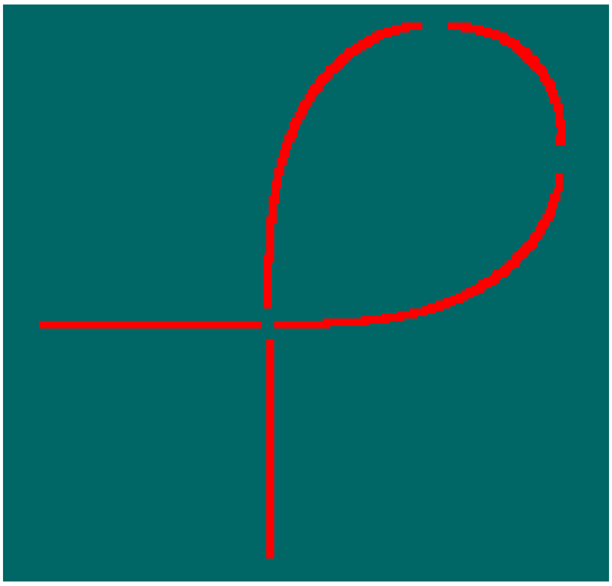

Figura 2: reta, clotóide, circunferência, clotóide, reta

A Fig.3 mostra o cruzamento entre as rodovias PR-317 e BR-376 de Maringá-PR. Notemos que a continuidade da curvatura é preservada em todas as secções da estrada.

Figura 3: Trevo de Maringá-PR entre PR-317 e BR-376.(Imagen retirada do google maps)

4.1.2 $k(s) = \dfrac{1}{\cosh(s)}$

Seja a função curvatura $k(s) = \dfrac{1}{\cosh(s)}$. Temos que

$$\alpha(s) = \left(x_0 + \int_0^s \cos\left(\int_0^s \operatorname{sech}(u)du \right) du, y_0 + \int_0^s \sin\left(\int_0^s \operatorname{sech}(u)du \right) du \right) \tag{35}$$

Essas integrais não tem solução analítica imediata, portanto aproximaremos o valor numéricamente.

Na Fig.4 temos a curva $\alpha(s)$ no intervalo de $[0,10]$ e $H = 0,01$ e o gráfico quando $H = 5$.

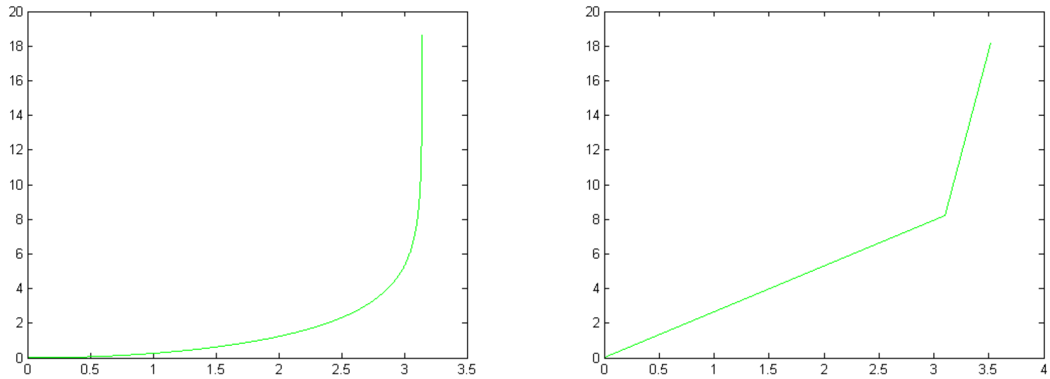

Figura 4: Figura da esquerda $k(s) = \dfrac{1}{\cosh(s)}$ e $H = 0,01$. Figura da direita $k(s) = \dfrac{1}{\cosh(s)}$ e $H = 5$

Percebemos que quando escolhemos um tamanho menor do intervalo para fazer a integração o traço da curva é suave, já quando aumentamos o tamanho, tem-se um erro no traço da curva.

5 CONCLUSÃO

Diante o exposto, é possível concluir que com o auxílio da integração numérica podemos conhecer o traço de uma determinada curva, a partir de sua função curvatura. Porém, devemos ter cuidado com o tamanho do intervalo que escolhemos para fazer a integração, pois a escolha de um H inapropriado pode levar a um traço incorreto da curva.

6 *Agradecimentos*

Agradeço em especial ao meu orientador, o professor Alexandre Athayde, pela disponibilidade, apoio e dedicação durante o trabalho. Agradeço, também, aos professores Giovanni Nunes, Lisandra Sauer e Janice Nery pela colaboração e auxílio na escrita do trabalho. E, agradeço ao professor Jairo Ramalho pelo auxílio com o Matlab.

7 REFERÊNCIAS

BURDEN,R.L., FAIRES,J.D. Análise Numérica. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003.
RUGGIERO, M.A.G, LOPES,V.L.R. Cálculo Númerico: Aspectos Teóricos e Computacionais. São Paulo: Pearson Books, 1996.
TENENBLAT, K. Introdução à Geometria Diferencial. São Paulo: Blucher, 2008.
ATRACTOR. Matemática Interactiva. Acesso em 25 set. 2014. Disponível em: $http://www.atractor.pt/mat/curvtor/conducao_suave/estradas.htm.$