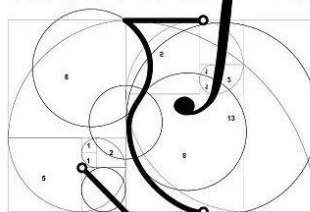


XX EREMAT SUL

Encontro Regional
de Estudantes de
Matemática da Região Sul



MODELAGEM MATEMÁTICA APLICADA AO CONTROLE BIOLÓGICO DE PRAGAS EM LAVOURAS DE MILHOS.

Jéssica C. S. Bueno – E-mail: jessica_bsaldivia@hotmail.com

Universidade Federal de Pelotas, Departamento de Matemática e Estatística,
Campus Universitário, 96010-900 – Capão do Leão, RS, Brasil.

Alexandre Molter – E-mail: alexandre.molter@yahoo.com.br

Universidade Federal de Pelotas, Departamento de Matemática e Estatística,
Campus Universitário, 96010-900 – Capão do Leão, RS, Brasil.

Luciana R. Piovesan – E-mail: lurpiovesan@gmail.com

Universidade Federal de Pelotas, Centro de Engenharias, 96010280 – Pelotas,
RS, Brasil.

Resumo: Este trabalho investiga o modelo de competição de Lotka-Volterra para uma presa e um predador, introduzindo no sistema estratégias de controle biológico de pragas. A estratégia de controle biológico consiste em inserir inimigos naturais de modo que a densidade de pragas seja estabilizada abaixo do nível de danos econômicos a lavoura, bem como manter o equilíbrio biológico. Nesta aplicação, a presa é a lagarta do cartucho do milho, *Spodoptera frugiperda*, principal praga da lavoura de milho, e o predador, seu inimigo natural, o parasitoide *Trichogramma*. Duas estratégias de controle são aplicadas ao modelo de Lotka-Volterra, ambas utilizando a teoria de controle ótimo. Na primeira, é introduzida uma função de controle no sistema linearizado do modelo Lotka-Volterra. Na segunda, a função de controle é introduzida no sistema não linear. A eficácia das estratégias de controle utilizadas é verificada por meio de simulações numéricas.

Palavras-chave: Modelo de Lotka-Volterra, Lagarta do Cartucho do milho, Controle Biológico.

1. INTRODUÇÃO

A modelagem matemática de sistemas presa-predador é uma importante ferramenta nos estudos de problemas biológicos. Um dos modelos mais utilizados e importantes neste meio é o modelo de Lotka-Volterra, o qual retrata a interação entre duas ou mais espécies, no caso mais específico presa-predador.

Apresentamos neste trabalho o problema sobre controle biológico de uma espécie de praga na lavoura de milho. A estratégia de controle consiste em inserir uma espécie de predador em meio às pragas que afetam as plantações, com objetivo de manter a população de pragas abaixo do nível de danos econômicos, visto que uma forma de minimizar ou evitar perdas econômicas na agricultura é aplicação do controle biológico (Bassanezi, 2002) e

também evitar a não extinção da praga visto que isso poderia influenciar nas questões ambientais.

A cultura de milho é atacada por diversas espécies de insetos desde a semeadura até a colheita, onde a praga mais prejudicial à plantação de milho é a lagarta do cartucho do milho, *Spodoptera frugiperda*, que reduz em até 34% a lavoura de milho (Pereira, 2007).

Neste contexto, o Parasitoide *Trichogramma* é um predador natural da lagarta do cartucho do milho (Cruz & Monteiro, 2004). A vespa *Trichogramma* parasita os ovos das mariposas (fase adulta da lagarta do cartucho do milho) e, com isso, impede o nascimento de novas lagartas. O ciclo de vida do parasita (predador) é em torno de 10 dias. Já o ciclo de vida da presa (lagarta do cartucho do milho) é em torno de 30 dias e está descrito na Tabela 1.



Figura 1: *Spodoptera frugiperda*, lagarta do cartucho do milho.

Fonte:

<http://www.pioneersementes.com.br/concursofotografiapioneer/galeria/2013/lucas-bochnia.html> Foto: Lucas Bochnia, 2013.

Ciclo biológico <i>Spodoptera frugiperda</i>	
Incubação dos ovos	3 dias
Período larval	15 dias
Média de ovos por fêmea	100 ovos
Ciclo total	30 dias

Tabela 1: Ciclo biológico *Spodoptera frugiperda*

Fonte: Comunicado Técnico 114, EMBRAPA.

Recomenda-se a aplicação do controle biológico quando encontradas em média sete lagartas do cartucho do milho por metro quadrado, ou seja, valores superiores a esta densidade causam danos econômicos à lavoura.

Portanto, o objetivo deste trabalho é utilizar um modelo presa-predador de Lotka-Volterra para descrever a dinâmica comportamental entre a lagarta do cartucho do milho e a vespa, introduzindo estratégias de controle no modelo. No trabalho serão formulados e analisados dois problemas de controle ótimo de pragas através da introdução de inimigos naturais no sistema. No primeiro será considerado o sistema linearizado do modelo de Lotka-Volterra e no segundo o sistema não linear do mesmo. Através de simulações numéricas se buscará manter o sistema em níveis de pragas desejados para o equilíbrio biológico e abaixo de danos econômicos.

2. MODELO DE LOTKA-VOLTERRA APLICADO À LAVOURA DE MILHO

O modelo de Lotka-Volterra com competição pode ser descrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1(r_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2) \\ \dot{x}_2 &= x_2(-r_2 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2), \end{aligned} \quad (1)$$

onde x_1 e x_2 são respectivamente as populações de presa (lagarta do cartucho do milho) dado pelo número de lagartas por metro quadrado, e seu predador (parasitoide - inimigo natural) dado pelo número de vespas por metro quadrado.

O coeficiente r_1 caracteriza a taxa de reprodução da lagarta do cartucho de milho (presa); r_2 caracteriza a taxa de mortalidade natural de vespas (predador). Os coeficientes $a_{ij}, i, j = 1, 2$ caracterizam as taxas de interações entre as espécies do sistema, sendo que nesta situação o $a_{22} = 0$, pois os predadores não competem entre si.

Calcularemos os valores dos coeficientes com base nos dados apresentados na Tabela 1. Segundo o modelo de Malthus, temos $\frac{dN}{dt} = rN$, onde r é a taxa de crescimento ou decrescimento de uma determinada população N , dependendo se é positivo ou negativo respectivamente (Boyce & Diprima, 2002).

Uma solução para o modelo de Malthus é $N = N_0 e^{r_1 t}$, onde N_0 é a condição inicial. A partir dos dados da Tabela 1, temos $100 = 1 \cdot e^{30r_1}$, isto é, $\ln(100) = 30r_1$, obtendo-se $r_1 = \frac{\ln(100)}{30} = 0,15$. A expectativa de vida do parasitoide é em torno de 10 dias, portando, o coeficiente de mortalidade é $r_2 = \frac{1}{10} = 0,1$. Os valores de a_{11}, a_{12} e a_{21} foram calculados com base nas taxas de crescimento e parâmetros de interação de cada espécie. Os valores dos coeficientes do modelo (1) estão organizados na tabela 2.

r_1	r_2	a_{11}	a_{12}	a_{21}
0,15	0,1	0,0009	0,036	0,0015

Tabela 2: valores dos coeficientes para o modelo de Lotka-Volterra com competição

Atribuindo os valores dos coeficientes da Tabela 2 ao sistema (1) obtém-se:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1(0,15 - 0,0009x_1 - 0,036x_2) \\ \dot{x}_2 &= x_2(-0,1 + 0,0015x_1). \end{aligned} \quad (2)$$

O sistema (2) é quase linear na vizinhança de cada ponto crítico. Para analisar a estabilidade do sistema (2), primeiramente determinamos os pontos críticos, de onde encontramos três: $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (8,0)$ e $P_3 = (66,67; 2,5)$.

Linearizando-o em torno do ponto crítico P_1 e P_2 verificou-se que estes pontos críticos são instáveis, ou seja, independentes das condições iniciais (diferentes de zero) que tomarmos a população tanto de presas quanto de predador nunca se extinguirão. Isso é o que se espera do modelo, visto que, não desejamos que as populações se extingam na ambiente. Do ponto P_1 , podemos observar que não há significado biológico, uma vez que não existem presas e predadores. Em P_2 temos a ausência de predadores, tornando-se assim, inviável a aplicação do controle biológico. Em contra partida em P_3 há tanto presas quanto predadores, sendo este o único ponto de interesse para análise.

Linearizando-o em $P_3 = (66,67; 2,5)$, obtém-se:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -0,06y_1 - 2,4y_2 \\ \dot{y}_2 &= 0,00375y_1 - 0,0016y_2, \end{aligned} \quad (3)$$

de onde obtém-se que $y_1 = x_1 - 66,67$ e $y_2 = x_2 - 2,5$.

Os autovalores do sistema linear (3) são:

$$r_1 = -0,0308 + 0,0903i \text{ e } r_2 = -0,0308 - 0,0903i. \quad (4)$$

Logo, temos um ponto espiral assintoticamente estável em $P_3 = (66,67; 2,5)$, deste modo o sistema (2) irá estabilizar-se em $P_3 = (66,67; 2,5)$, entretanto 66,67 é um número elevado de pragas para a lavoura de milho, isto é, com esse número de lagartas do cartucho, a lavoura terá sérios danos. Neste caso, será necessário aplicar a estratégia de controle a fim de diminuir o número de lagartas do cartucho obtendo, assim, um ponto de equilíbrio desejável que não cause danos à plantação de milho.

Na figura 2 é apresentada a dinâmica do sistema sem controle (2).

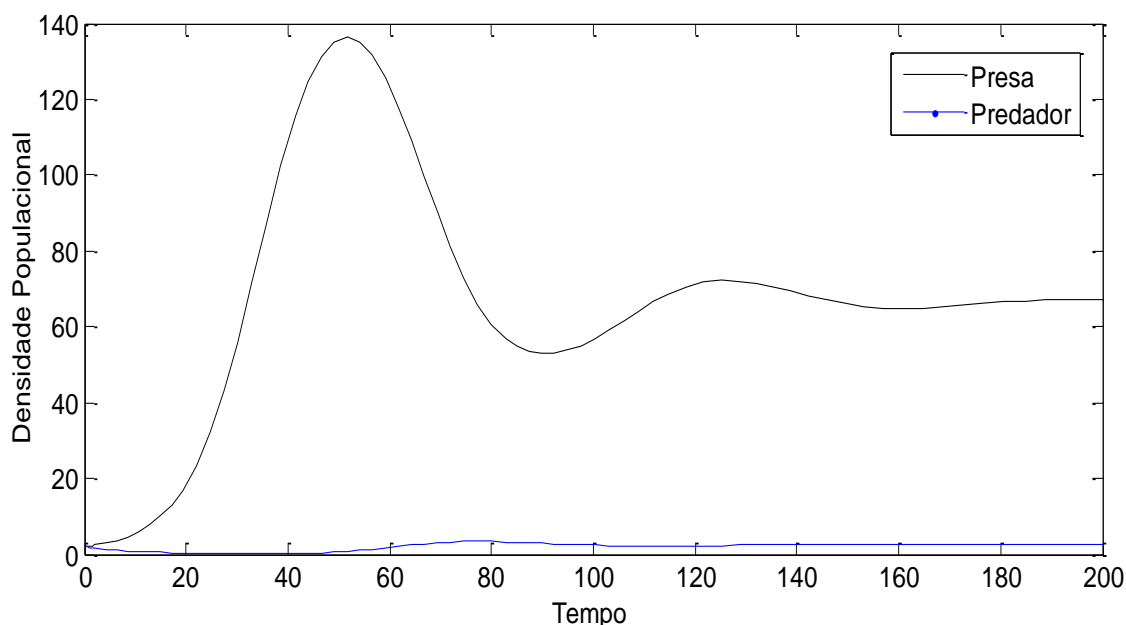


Figura 2: Trajetórias do sistema (2) sem controle.

3. CONTROLE ÓTIMO PARA O MODELO PRESA-PREDADOR LINEARIZADO

As interações entre pragas e seus inimigos naturais podem ser representadas por um modelo geral que tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 f(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= x_2 g(x_1, x_2), \end{aligned} \quad (5)$$

onde x_1 e x_2 representam, respectivamente, a densidade de presas e predadores.

O sistema (5) com controle tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 f(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= x_2 g(x_1, x_2) + U, \end{aligned} \quad (6)$$

onde $U = u + u^*$,

$$u^* = -x_2^* g(x_1^*, x_2^*) \quad (7)$$

e o ponto (x_1^*, x_2^*) é o estado de equilíbrio desejado para sistema (5).

Então, o problema do controle ótimo pode ser formulado como segue. Queremos encontrar a função de controle u que transfere o sistema (6) do estado inicial:

$$Y(0) = Y_0, \quad (8)$$

ao estado final:

$$Y(\infty) = 0, \quad (9)$$

e minimiza o funcional:

$$J = \int_0^{\infty} [Y^T Q Y + u R u] dt, \quad (10)$$

onde $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_1^* \\ x_2 - x_2^* \end{bmatrix}$, $R = [1]$ e $Q = \begin{bmatrix} q_{11} & 0 \\ 0 & q_{22} \end{bmatrix}$, sendo Q uma matriz semidefinida positiva. Desta forma, aplicando o controle deseja-se que o sistema estabilize no nível de pragas desejadas à medida que a perturbação $x - x^*$ tenda a zero.

Linearizando o sistema (5) em torno do ponto de equilíbrio desejado (x_1^*, x_2^*) , temos:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1^* f(x_1^*, x_2^*) + f(x_1^*, x_2^*) (x_1 - x_1^*) + x_1^* f'_{x_1}(x_1^*, x_2^*) (x_1 - x_1^*) + x_1^* f'_{x_2}(x_1^*, x_2^*) (x_2 - x_2^*) \\ \dot{x}_2 &= x_2^* g(x_1^*, x_2^*) + g(x_1^*, x_2^*) (x_2 - x_2^*) + x_2^* g'_{x_1}(x_1^*, x_2^*) (x_1 - x_1^*) + x_2^* g'_{x_2}(x_1^*, x_2^*) (x_2 - x_2^*) - x_2^* g(x_1^*, x_2^*) + u \end{aligned} \quad (11)$$

Reescrevendo o sistema linearizado (11) em forma matricial tem-se:

$$\dot{Y} = AY + Bu, \quad (12)$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} x_1^* f'_{x_1}(x_1^*, x_2^*) & x_1^* f'_{x_2}(x_1^*, x_2^*) \\ x_2^* g'_{x_1}(x_1^*, x_2^*) & x_2^* g'_{x_2}(x_1^*, x_2^*) \end{bmatrix}, \text{ e } B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Neste caso a função de controle u pode ser obtida da seguinte lei de controle ótimo:

$$u = -R^{-1} B^T S Y, \quad (13)$$

onde a matriz S é simétrica e pode ser calculada utilizando-se a equação algébrica de Riccati:

$$SA - A^T S - SBR^{-1}B^T S + Q = 0. \quad (14)$$

Como vimos na seção 2 o sistema (2) estabiliza-se em um nível de pragas superior ao recomendado, sendo necessário aplicar o controle ao sistema. Denotaremos por x_d a densidade desejada de pragas, que não causam danos econômicos. No caso da plantação de milho temos uma densidade $x_d \approx 7$ lagartas por metro quadrado.

Para manter o sistema em um ponto de equilíbrio desejado (x_1^*, x_2^*) , escolhemos $x_1^* = 6 < x_d = 7$, e neste caso x_2^* pode ser encontrado na primeira equação do sistema (2), $x_2^* = \frac{r_1 - a_{11}x_1^*}{a_{12}}$, logo, $x_2^* = 4$. Assim, o ponto de equilíbrio desejado é $(6,4)$.

Considerando o sistema de Lotka-Volterra com controle (6) e escrevendo em forma matricial (8), obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,15 - 0,0018x_1^* - 0,036x_2^* & -0,036x_1^* \\ 0,0015x_2^* & -0,1 + 0,0015x_1^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + Bu, \quad (15)$$

onde $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e no ponto de equilíbrio desejável $(6,4)$ temos:

$$A = \begin{bmatrix} -0,06 & -2,4 \\ 0,00375 & -0,0016 \end{bmatrix}, \quad (16)$$

escolhendo:

$$Q = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \text{ e } R = [1]. \quad (17)$$

Calculando S da equação de Riccati (14), obtém-se:

$$S = \begin{bmatrix} 6,3533 & -3,0356 \\ -3,0356 & 4,9553 \end{bmatrix}. \quad (18)$$

A função de controle ótimo u do sistema tem a seguinte forma:

$$u = 3,0356y_1 - 4,9553y_2. \quad (19)$$

Simulações foram realizadas no *software Matlab*, utilizando a função *LQR* para resolver a equação de Riccati e *Runge-Kutta* de quarta ordem para a resolução do sistema. As trajetórias temporais do sistema com controle (6) são apresentadas na Figura 3.

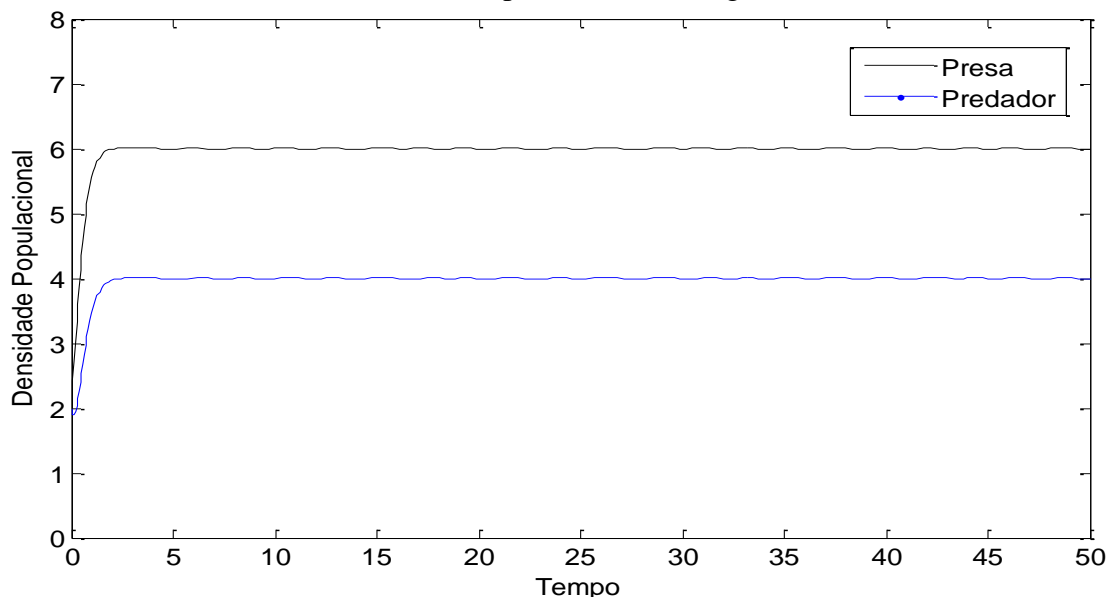


Figura 3: Trajetórias do sistema linearizado controlado utilizando a função de controle (19).

Pela Figura 3 é possível notar que o sistema foi controlado e atinge o seu equilíbrio desejado em menos de 2 dias.

4. CONTROLE ÓTIMO NÃO LINEAR DO MODELO DE LOTKA-VOLTERRA

O modelo de Lotka-Volterra com controle ótimo não linear pode ser descrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1(r_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2) \\ \dot{x}_2 &= x_2(r_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 + u + u^*), \end{aligned} \quad (20)$$

onde x_1 e x_2 representam, respectivamente, a densidade de presas e predadores.

No ponto de equilíbrio desejado (x_1^*, x_2^*) do sistema (20), obtemos:

$$\begin{aligned} r_1 - a_{11}x_1^* - a_{12}x_2^* &= 0, \\ r_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 + u^* &= 0, \end{aligned} \quad (21)$$

onde

$$u^* = -r_2 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2. \quad (22)$$

Este problema do controle consiste em determinar a função de controle u que transfere o sistema (21) do estado inicial:

$$Y(0) = Y_0, \quad (23)$$

ao estado final:

$$Y(\infty) = 0, \quad (24)$$

minimizando o funcional:

$$J = \int_0^{\infty} [Y^T Q Y + r u^2] dt, \quad (25)$$

onde $Y = \begin{bmatrix} x_1 - x_1^* \\ x_2 - x_2^* \end{bmatrix}$ e $Q \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ é positiva definida e r é uma constante a ser calculada.

De acordo com a programação dinâmica o problema do controle ótimo formulado reduz-se à resolução da equação de Hamilton-Jacobi-Bellman:

$$\mathcal{H}(x, u) = \min_u \left(\frac{ds}{dt} + w \right) = \min_u \left(\frac{ds}{dt} + w \right)_{u=u^o} = 0, \quad (26)$$

onde

$$w = Y^T Q Y + r u^2 \quad (27)$$

sendo

$$S(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^2 c_i \left(x_i - x_i^* - x_i^* \ln \left(\frac{x_i}{x_i^*} \right) \right) \quad (28)$$

uma função de Lyapunov para sistemas populacionais, satisfazendo a condição final:

$$S(\infty) = 0 \quad (29)$$

A derivada total de S em relação a t é dada por:

$$\frac{ds}{dt} = c_1(x_1 - x_1^*)(-a_{11}(x_1 - x_1^*) - a_{12}(x_2 - x_2^*)) + c_2(x_2 - x_2^*)(-a_{21}(x_1 - x_1^*) - a_{22}(x_2 - x_2^*) + u). \quad (30)$$

Substituindo as equações (27) e (30) na equação (26), obtém-se:

$$\min_u \{ (c_1(x_1 - x_1^*)(-a_{11}(x_1 - x_1^*) - a_{12}(x_2 - x_2^*)) + c_2(x_2 - x_2^*)(-a_{21}(x_1 - x_1^*) - a_{22}(x_2 - x_2^*) + u) + Y^T Q Y + r u^2) \} = 0 \quad (31)$$

A função u pode ser obtida da seguinte condição:

$$\frac{\partial [\mathcal{H}(x, u)]}{\partial u} = 0, \quad (32)$$

então,

$$u = -\frac{c_2(x_2 - x_2^*)}{2r}. \quad (33)$$

Substituindo a equação (33) em (31) temos:

$$-c_1 a_{11}(x_1 - x_1^*)^2 - c_1 a_{12}(x_1 - x_1^*)(x_2 - x_2^*) - c_2 a_{21}(x_1 - x_1^*)(x_2 - x_2^*) - c_2 a_{22}(x_2 - x_2^*)^2 - \frac{c_2^2(x_2 - x_2^*)^2}{2r} + \frac{c_2^2(x_2 - x_2^*)^2}{4r} + q_{11}(x_1 - x_1^*)^2 + q_{21}(x_1 - x_1^*)(x_2 - x_2^*) + q_{12}(x_1 - x_1^*)(x_2 - x_2^*) + q_{22}(x_2 - x_2^*)^2 = 0 \quad (34)$$

Comparando os termos similares, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} -c_1 a_{11} + q_{11} &= 0 \\ -c_1 a_{12} - c_2 a_{21} + q_{21} + q_{12} &= 0 \\ -c_2 a_{22} - \frac{c_2^2}{2r} + q_{22} + \frac{c_2^2}{4r} &= 0 \end{aligned} \quad (35)$$

Para realizar a simulação numérica foram considerados os seguintes valores: $q_{11} = 3,75 \times 10^{-5}$, $q_{12} = q_{21} = 0$ e $q_{22} = 1,25 \times 10^{-2}$. A partir do sistema (33) foram calculados $c_1 = 0,0417$, $c_2 = 1$ e $r = 20$.

As trajetórias temporais do sistema com controle (20) são apresentadas na Figura 4.

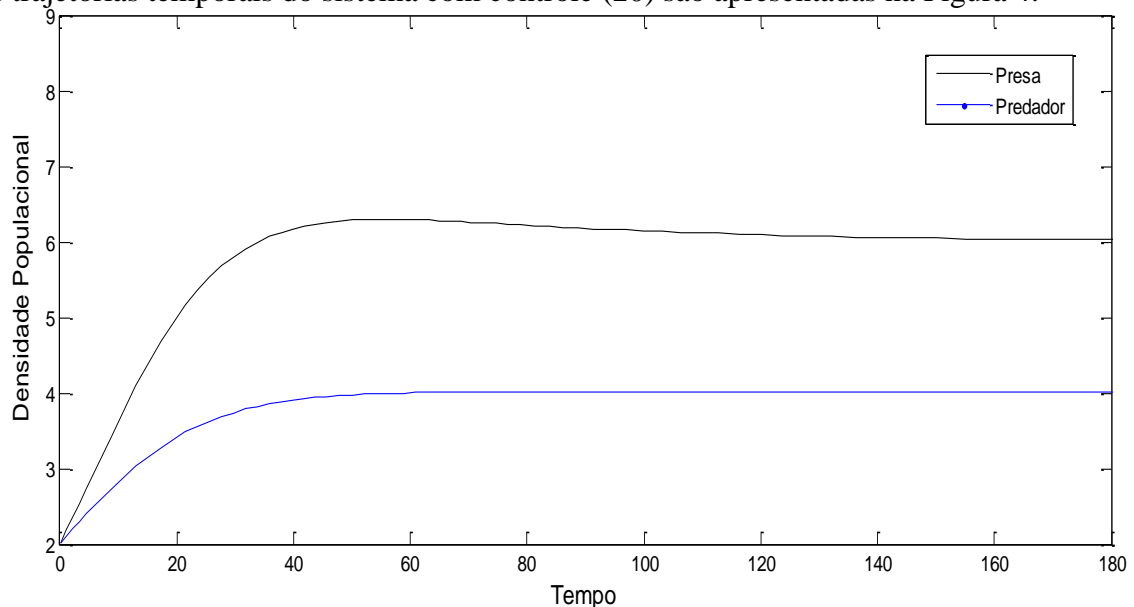


Figura 4: Trajetórias do sistema controlado.

A Figura 4 mostra que o sistema controlado aproxima-se do seu estado de equilíbrio em torno de 25 dias. Verificou-se em outras simulações que, para este modelo, o tempo que as pragas levam para atingir o nível de pragas desejado depende dos parâmetros da matriz Q e o valor de r . É possível reduzir o tempo gasto para atingir esse nível, no entanto isto também pode levar a picos de densidades de pragas em momentos anteriores ao equilíbrio, o que não seria desejado por causarem danos à lavoura.

5. CONCLUSÕES

Neste trabalho foi utilizado o modelo de Lotka-Volterra de uma presa e um predador para descrever a dinâmica de competição entre duas espécies comuns nas lavouras do milho, sendo uma delas a lagarta do cartucho do milho (presa) e a outra a vespa (predadora). Foi formulado e resolvido o problema de controle ótimo para o modelo presa-predador de Lotka-Volterra

utilizando duas estratégias diferentes de controle, uma linear e outra não linear. O modelo com controle foi aplicado ao agrossistema de cultura do milho.

A metodologia proposta foi simulada de forma computacional. Os resultados obtidos mostraram que as técnicas de controle utilizadas foram eficientes, visto que o sistema atingiu a densidade de pragas abaixo do nível de danos econômicos e manteve o equilíbrio biológico. Observou-se que a eficiência do controle depende dos parâmetros utilizados no modelo, podendo o sistema ser controlado em curto espaço de tempo, desde que se conduza uma escolha adequada dos parâmetros.

Agradecimentos

A primeira autora agradece à UFPel pelo apoio financeiro recebido.

REFERÊNCIAS

BASSANEZI, R. C. **Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática**. São Paulo: Editora Contexto, 2002.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. São Paulo: Editora LTC, 2002.

CRUZ, I.; MONTEIRO, M. A. R. **Controle Biológico da lagarta do cartucho do milho *Spodoptera frugiperda* utilizando o parasitoide de ovos *Trichogramma pretiosum***. Sete Lagoas, dez. 2004. Comunicado técnico 114. Acessado em jan. 2014. Online. Disponível em <http://www.agencia.cnptia.embrapa.br/recursos/Comunicado114ID-mk8B5WBhWn.pdf>

MOLTER, A.; RAFIKOV, M. Controle Ótimo para um Sistema Caótico de Lotka-Volterra. **Tendências em Matemática Aplicada e Computacional**, v.5, n. 2, p.237-245. 2004.

MOLTER, A.; RAFIKOV, M. Nonlinear optimal control of population systems: applications in ecosystems. **Nonlinear Dynamics**, v. 76, n. 2, p. 1141-1150, jan. 2014.

SCHMID, A. B. **Controle ótimo de sistemas populacionais que exibem caos**. 2005. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática) - Curso de Pós-graduação em Modelagem Matemática, Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul.

TUSSET, A.; RAFIKOV, M. Controle Ótimo de Pragas: Modelos Linearizados, Funcional Quadrático. **Tendências em Matemática Aplicada e Computacional**, v. 5, n. 1, p. 145-154, 2004.

PEREIRA, L. G. B. **Táticas de Controle da Lagarta-do-Cartucho do Milho, *Spodoptera frugiperda***. Minas Gerais, out. 2007. Acessado em jan. 2014. Online. Disponível em: <http://sbirt.ibict.br/dossie-tecnico/downloadsDT/MTk2>