



## APRENDENDO MATEMÁTICA ATRAVÉS DE FRACTAIS: UMA EXPERIÊNCIA NO ENSINO MÉDIO

**Andressa Franco Vargas** - andressavargas1@yahoo.com.br

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha, Câmpus Alegrete, RS 377  
Km 27 – Passo Novo – CEP 97555-000. Alegrete, RS, Brasil

**Bianca Bitencourt da Silva** - bias.bitencourt@hotmail.com

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha, Câmpus Alegrete, RS 377  
Km 27 – Passo Novo – CEP 97555-000. Alegrete, RS, Brasil

**Clarissa Gonçalves Lira** - clarissagl@gmail.com

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha, Câmpus Alegrete, RS 377  
Km 27 – Passo Novo – CEP 97555-000. Alegrete, RS, Brasil

**Mirian Marchezan Lopes** - mirian.marchezan@iffarroupilha.edu.br

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha, Câmpus Alegrete, RS 377  
Km 27 – Passo Novo – CEP 97555-000. Alegrete, RS, Brasil

**Resumo.** Este trabalho apresenta o relato de uma proposta de ensino utilizando a Geometria Fractal, tendo como principais objetivos a motivação dos alunos em estudar matemática e obter uma aprendizagem significativa dos conceitos trabalhados. O francês Benoit Mandelbrot (1983) difundiu os estudos e nomeou essa geometria, conceituando fractais como uma figura que pode ser quebrada em diversos pedaços, sendo cada um desses pedaços uma reprodução do todo. A utilização dos fractais proporciona ao aluno uma percepção dos elementos da matemática ao seu cotidiano, nessa experiência exploraram-se os conteúdos de sequências numéricas, progressões geométricas e cálculos de área. Foi aplicada uma oficina em uma turma de terceiro ano do Ensino Médio do Instituto Federal Farroupilha – Câmpus Alegrete. Os resultados obtidos foram bastante satisfatórios a respeito da oficina ministrada, sendo que foi possível observar através da participação dos alunos no momento da realização das atividades e também com base nas respostas dadas ao questionário investigativo.

**Palavras Chave:** Geometria fractal, Progressão geométrica, Aprendizagem significativa.

## 1 INTRODUÇÃO

As ciências exatas em geral apresentam grandes índices de reprovação e o educador tem isso como grande desafio. Pode-se dizer que o ensino de Matemática em sua grande maioria sempre foi voltado para aprendizagem dos conteúdos de maneira formal, restrito a resolução

de problemas e aplicação de fórmulas, gerando certo distanciamento dessa matéria perante a realidade vivenciada pelos educandos.

A aproximação destes conteúdos com a realidade do aluno é de grande valia para estimular a aprendizagem e o interesse dos mesmos, fazendo-os perceber que a matemática está presente no seu dia-a-dia. Sendo assim, o presente trabalho visa trabalhar a Geometria Fractal no Ensino Médio, mostrar um pouco do universo dos fractais juntamente com os conteúdos da matemática.

O objetivo deste trabalho é abordar a Geometria Fractal de forma diferenciada, utilizando os conteúdos de sequências numéricas, progressões geométricas (P.G.) e cálculos de área em uma turma de terceiro ano do Ensino Médio. Este ramo da matemática é pouco explorado em sala de aula, apesar de ser um conteúdo interessante e que possibilita a aproximação do tema com a realidade dos educandos. É de grande importância que os educandos possam observar que a matemática está presente também na natureza, assim como em vários ambientes que os cercam.

## 2 GEOMETRIA FRACTAL

Diversos autores afirmam que a Geometria surgiu no Egito, nas proximidades do vale do rio Nilo, onde as cheias obrigavam os faraós a nomear os funcionários com o intuito de restabelecer fronteiras com inúmeras propriedades que eram atingidas pelas inundações. Sabe-se também que a Geometria é uma ciência antiga e que sua origem é contada de diversas formas. O famoso historiador grego, Heródoto, do Século V a.C. disse:

“Esse faraó (Sesótris) realizou a partilha das terras, concedendo a cada egípcio uma porção igual, com a condição de ser-lhe pago todos os 3 anos certo tributo;[...] O soberano enviava agrimensores para o local, para determinar a redução sofrida pelo terreno, passando o proprietário a pagar um tributo proporcional ao que restara. Eis, ao que me parece, a origem da geometria, que teria passado do Egito para a Grécia”. (GARBI, 2007).

Os Egípcios utilizavam a geometria na agricultura, irrigação e obras para defesas contra inundações, usavam para engenharia nas construções de casas e pirâmides. Também aplicavam nas divisões de terrenos em partes iguais, para realizar cobrança de impostos.

Essa Geometria foi nomeada Euclidiana, em homenagem ao seu precursor Euclides de Alexandria que teria vivido por volta de 300 a.C. Segundo Àvila (2001), Euclides escreveu várias obras científicas, as mais famosas das quais, conhecida com o nome de *Elementos*, que reúne quase todo conhecimento matemático daquele tempo.

É de suma importância a Geometria dentro da Matemática e na vida de um indivíduo, pois é nela que se estudam quadriláteros e poliedros, onde existem diversas estruturas dessas formas no nosso cotidiano.

Mandelbrot (1983) afirmou que "Nuvens não são esferas, montanhas não são cones, continentes não são círculos, o som do latido não é contínuo e nem o raio viaja em linha reta.", diante disso, a geometria fractal surgiu da necessidade de explicar certos acontecimentos que já não poderiam ser justificados ou calculados pela Geometria Euclidiana, como, por exemplo, os fenômenos naturais ou objetos que não possuem definição em sua forma.

Existem diversas definições que descrevem um fractal, a de Sallum (2005) afirma que um fractal é uma figura que pode ser quebrada em pequenos pedaços, sendo cada um desses

pedaços uma reprodução do todo. Um fractal não pode ser visto porque é uma figura limite, porém, podemos ver as etapas de sua construção possibilitando uma ideia da figura toda.

Os fractais são formas geométricas que possuem padrões que podem se repetir ilimitadamente, mesmo que pertençam a uma área finita e podem ser definidos como fractais geométricos, que se repetem constantemente em um padrão, e os aleatórios que são produzidos através da tecnologia. Além disso, os fractais apresentam características como autossimilaridade, ou seja, parte de uma figura se assemelha à figura como um todo, dimensionalidade que diz respeito à dimensão que a figura ocupa no espaço e complexidade infinita que se refere ao procedimento realizado na formação de um fractal. Podemos encontrar também diversos exemplos de fractais presente na natureza, como no brócolis, repolho, nos raios, na folhas, nas pinhas.

Os estudos que anteriormente eram chamados de “monstros matemáticos”, na Grécia Antiga, China e Índia, receberam o nome que conhecemos atualmente através do matemático Benoit Mandelbrot, mesmo que já houvesse indícios de que os fractais já existiam por volta do século XX. A origem etimológica da palavra advém do adjetivo latino *fractus*, que significa “quebrado”, “fraturado”.

A geometria fractal tem forte ligação com a Teoria do Caos, teoria esta que diz respeito aos fenômenos que não podem ser previstos ou descritos pelas leis da matemática, ou seja, são fenômenos imprevisíveis. Segundo Sallum (2002), essa ciência trouxe consigo o ver ordem e padrões, onde anteriormente só se observava o irregular, o aleatório, o imprevisível, digamos mesmo o caótico.

O estudo da teoria do Caos teve início com o meteorologista Edward Lorentz, que criou um modelo computacional que simulava as condições climáticas, onde pode perceber que quando realizava pequenas alterações nas condições iniciais o resultado era extremamente desproporcional, um exemplo desse caos é conhecido como “efeito borboleta”, que diz que “o bater de asas de uma borboleta em Tóquio pode causar um furacão em Nova Iorque”. Esta metáfora é capaz de descrever as condições meteorológicas que apresentam grande dificuldade em serem previstas.

### 3 UTILIZANDO A GEOMETRIA FRACTAL COMO MÉTODO DE ENSINO

Com o passar dos anos a tecnologia começou a ganhar espaço quando se fala em educação. Logo, das discussões atuais dentro da educação matemática, o uso de tecnologias como auxílio à aprendizagem, tem ganhado ênfase (SOARES, 2008). Esta vem se mostrando uma forma inovadora de se trabalhar conteúdos que muitas vezes são de difícil entendimento e pouco atrativos.

A tecnologia no ensino vem para mudar este pensamento e trabalhar conteúdos de matemática de maneira diferenciada e lúdica podendo assim despertar em sala de aula assuntos que estão presentes no dia-a-dia. Proporcionando assim uma aprendizagem significativa, onde:

“A aprendizagem significativa, que é o conceito central da teoria de Ausubel (1968) e que foi aprofundada pelo próprio Ausubel, Novak e Hanesian (1980), é definida como a aprendizagem que ocorre quando as ideias novas estão ligadas a informações ou conceitos já existentes na estrutura cognitiva do indivíduo. Ou seja, a aprendizagem significativa só ocorrerá quando uma nova informação relaciona-se, de maneira substantiva (não literal) e não arbitrária, a um aspecto da base de formação conceitual do educando.” (SOARES, 2008).

Sem dúvida as ferramentas utilizadas na prática escolar permitem que o educador consiga apresentar os conteúdos de forma atraente e produtiva, podendo relacionar estes conceitos com os conhecimentos prévios dos alunos, possibilitando uma aprendizagem significativa. Logo, a geometria fractal pode despertar a curiosidade e interesse dos educandos, fornecendo ao matemático, ao professor, e ao educando, prazeres oriundos de várias formas de pensar e ver. (BARBOSA, 2002)

Pensando em uma proposta diferenciada, a geometria fractal abrange conteúdos de matemática em seu vasto campo, possibilitando a utilização de conceitos de potências e progressão geométrica, em vista de possibilitar o aluno uma aplicação de conteúdos já estudados, utilizando métodos diferentes. Contudo, acredita-se que o aluno tem uma aprendizagem significativa quando for deparado com o estudo e resolução de problemas do seu cotidiano.

Considerando uma proposta de oficina para ser realizada utilizamos dois fractais. Sendo eles:

- Fractal Triminó – Possibilita trabalhar com sequências numéricas e progressões geométricas. Para a construção de tal fractal, deve-se pegar três quadradinhos ou cubinhos e fazer a conexão em forma de L, este será um fractal triminó de nível 1. Para obter um fractal de nível 2, devemos substituir cada peça por um triminó L. Repete-se o processo na obtenção do fractal nível 2 para obter o nível 3. Os passos para obter os próximos níveis são análogos. Como mostra a Fig. 1 a seguir.

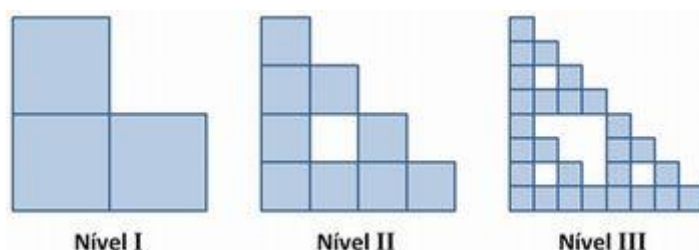


Figura 1- Fractal Triminó<sup>1</sup>

Após construir o fractal observa-se a quantidade de peças que foram utilizadas em cada iteração e construir a Tabela 1.

Tabela 1 - Iteração do fractal triminó

Nível	Quantidade de quadrados
1	$3^1=3$
2	$3^2=9$
3	$3^3=27$
4	$3^4=81$
5	$3^5=243$
N	$3^n$

Podemos também identificar a sequência numérica formada pelas quantidades de quadrados  $\{3, 9, 27, \dots, 3^n\}$  essa sequência é determinada por uma progressão geométrica, onde o primeiro termo  $a_1 = 3$  e a razão é dada por  $q = a_2/a_1$ , ou seja,  $q = 9/3 = 3$ . O termo geral da

P.G. é  $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ , então obtemos  $a_n = 3 \cdot 3^{n-1}$ . Após a construção, os alunos deverão determinar a razão e a lei de formação dessa P.G.

- Triângulo de Sierpinski – A construção desse fractal possibilita trabalhar conceitos de triângulos equiláteros, mediatriz e ponto médio de um seguimento. Inicialmente tem-se um triângulo equilátero de lado L e área A, determina-se os pontos médios unindo-os e determinando assim um novo triângulo de lado L/2. Então, divide-se o triângulo inicial em quatro triângulos congruentes, sendo eles  $\frac{1}{4}$  do triângulo inicial.

<sup>1</sup> Fonte: Portal do Professor. Disponível em:

<<http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=28533>> Acesso em set, 2014.

Retirando o triângulo central, agora se repete em cada um dos triângulos restantes a mesmas construções, unindo os pontos médios de modo que forme novos triângulos equiláteros e retirando o triângulo central. Logo na segunda iteração teremos nove triângulos de lado L/2. Como ilustra a Fig. 2 a seguir.

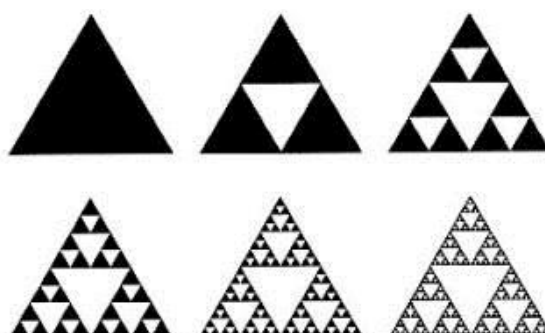


Figura 2 - Triângulo de Sierpinski<sup>2</sup>

Organizando os dados na Tabela 2 a seguir.

Tabela 2 - Triângulo de Sierpinski<sup>2</sup>

Nível	0	1	2	3	.....	n
Nº de triângulos	1	3	$3^2$	$3^3$	.....	$3^n$
Área de cada triângulo	A	$\left(\frac{1}{4}\right) * A$	$\left(\frac{1}{4}\right)^2 * A$	$\left(\frac{1}{4}\right)^3 * A$	.....	$\left(\frac{1}{4}\right)^n * A$
Área Total	A	$\left(\frac{3}{4}\right) * A$	$\left(\frac{3}{4}\right)^2 * A$	$\left(\frac{3}{4}\right)^3 * A$	.....	$\left(\frac{3}{4}\right)^n * A$

#### **4 RELATO DE UMA ATIVIDADE**

A oficina foi ministrada em uma turma de 3º ano do Ensino Médio do Instituto Federal Farroupilha – Câmpus Alegrete, no segundo semestre de 2014, utilizando o tempo de 1 hora e 40 minutos, sendo organizada da seguinte forma:

- Primeiro momento: Foi realizada uma pesquisa qualitativa a fim de avaliar os conhecimentos prévios dos alunos em questão, com o intuito de despertar a curiosidade sobre os assuntos matemáticos (Anexo I);
- Segundo momento: Foi feita uma síntese do assunto a ser trabalhado, utilizando recurso digital (SLIDE);
- Terceiro momento: Uma breve revisão dos conceitos de potências, progressão geométrica, áreas de triângulos;

---

<sup>2</sup> Fonte: Departamento de Informática e Estatística. Disponível em:  
<<http://www.inf.ufsc.br/~visao/2000/fractais/>> Acesso em set, 2014.

- Quarto momento: Apresentamos o Fractal Triminó, introduzindo conceitos de conteúdos de Progressão Geométrica;
- Sexto momento: Foi mostrado então o Triângulo de Sierpinski, e o cálculo da área total desse fractal.
- Sétimo momento: Foi realizada uma atividade de fixação explorando conceitos de P. G. e área.
- Oitavo momento: Confeccionamos um fractal, utilizando papel e tesoura. Com um intuito de uma melhor visualização e contato com o objeto por parte do aluno;
- Nono Momento: Uma pesquisa qualitativa para ser realizada uma avaliação dos alunos em relação a aula.

#### **5 CONSIDERAÇÕES FINAIS**

Tendo como ideia principal, a utilização da Geometria Fractal como um aliado durante a aplicação do conteúdo de Progressão Geométrica e o cálculo de área a fim de despertar o interesse e provocar a curiosidade do aluno, foram obtidos resultados bastante satisfatórios a respeito da oficina que foi trabalhada com a turma de terceiro ano do Ensino Médio integrado ao Técnico em Agropecuária. Foi possível observar através da participação dos alunos no momento da realização das atividades e também com as respostas dadas aos questionários investigativos.

Tendo como base o questionário I, onde foram feitas três perguntas referentes à aplicação matemática na natureza e com a exposição de imagens que instigam o aluno a pensar sobre o assunto. Na questão um, foram expostas três imagens (um carro, uma casa, um floco de neve) e foi perguntado qual era a matemática aplicada a essas figuras, em relação ao carro a ligação feita pelos educandos foi a relação da matemática com o custo em gasolina, quilometragem, fabricação e funcionamento, já em relação à casa, a grande maioria citou os gastos mensais juntamente com a manutenção, o floco de neve foi a grande incógnita por parte de quase todos os alunos, alguns observaram que existia formas geométricas na figura, assim como outros relataram a temperatura que é necessária para que ele se forme.



Na questão dois: Cite três lugares na natureza, onde você acredita que exista matemática, pode-se dizer que as respostas foram das mais variadas possíveis, como florestas, cachoeira, céu, jardim, árvore, pássaros, rios, montanhas, formação de rochas, desmatamento, lavouras, caverna, flores, agricultura. Sobre a questão três, que se refere à matemática existente em um brócolis, as respostas foram bem interessantes, tais como peso, altura, comprimento, nutrientes, irrigação na plantação, em sua comercialização e distribuição.

Após a análise das respostas obtidas no questionário, é possível afirmar que os alunos relacionam coisas simples do cotidiano com muita criatividade, imaginação e lógica.

Utilizando slides abordou-se a temática falando de sua história e seus principais pesquisadores. Para melhor entendimento dos Fractais, os conteúdos de P.G e cálculo de áreas foram trabalhados através de explicações e exercícios. Percebeu-se que após a apresentação e abordagem dos conteúdos, os alunos se mostraram dispostos a realizar as atividades propostas, sendo feita com a ajuda das acadêmicas.

Contudo a parte de maior interação foi o momento da confecção de um fractal, os educandos foram participativos, cada um pode construir seu próprio fractal seguindo passo a passo as orientações das acadêmicas, como ilustra Fig. 3. Desta forma cada um pode perceber e ter contato com os fractais, de certa maneira é importante trazer para a sala de aula estas atividades diferenciadas, pois assim o aluno pode ter contato e por si mesmo manipular estes objetos tornando assim o processo de aprendizagem mais interessante e válido.

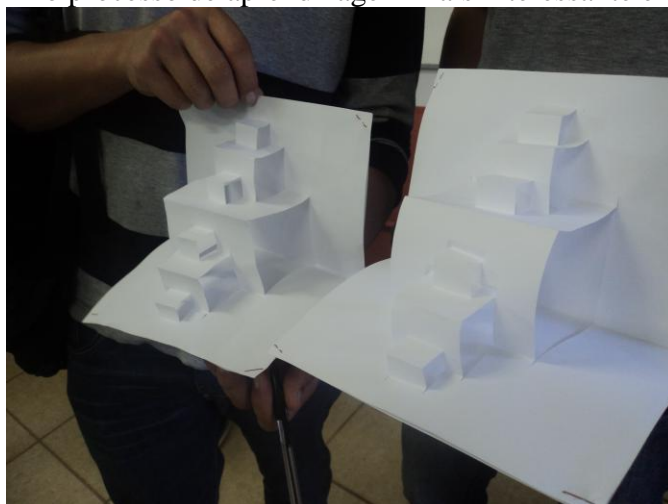


Figura 3: Fractal Construído pelos alunos

Após a realização de todas as atividades planejadas, foi distribuído o questionário II, que continha três perguntas com a finalidade de investigar se a aula foi compreendida e o que o aluno pode aprender por meio desta atividade.

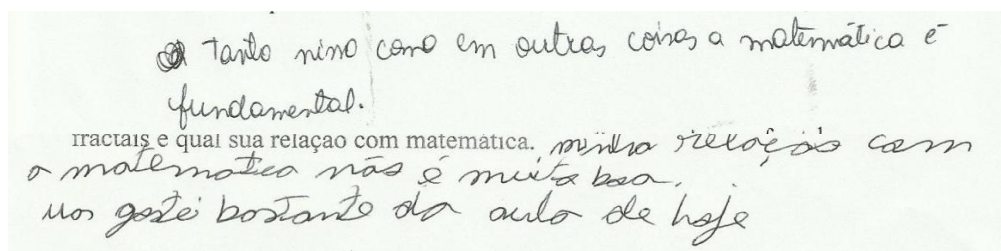


Figura 4: Respostas relatadas pelos alunos

Primeiramente foi perguntado qual foi a compreensão que se pode formar em relação aos fractais: muitos definiram o fractal como uma forma que não se modifica, ou seja, começam em um formato e terminam no mesmo, outros relataram que puderem entender melhor o conteúdo de progressão geométrica e geometria. Pode-se notar também que até quem não tinha afinidade com a matemática acabou se mostrando interessado pelas atividades, como ilustra a Fig. 4.

Com isso, percebe-se que os métodos diferenciados podem tornar a aula bem mais agradável. Na pergunta dois, foi pedido para os alunos citarem algum lugar da natureza que eles acreditavam que existisse um fractal, as respostas foram variadas, desde plantas, legumes, frutas e até vidraças de igreja.

Fazendo uma análise na questão três, foi questionado como eles próprios caracterizam o rendimento da aula, a partir das respostas dos 23 alunos, construiu-se um gráfico para verificar o resultado, como mostra a Fig. 5.

Sendo assim, foi interessante realizar uma aproximação deste tema com a realidade do aluno, de modo que este perceba que a matemática esta presente no seu dia-a-dia, sendo possível ressaltar que quando há a contextualização das atividades envolvendo a realidade, obtém-se um aluno mais interessado e participativo.

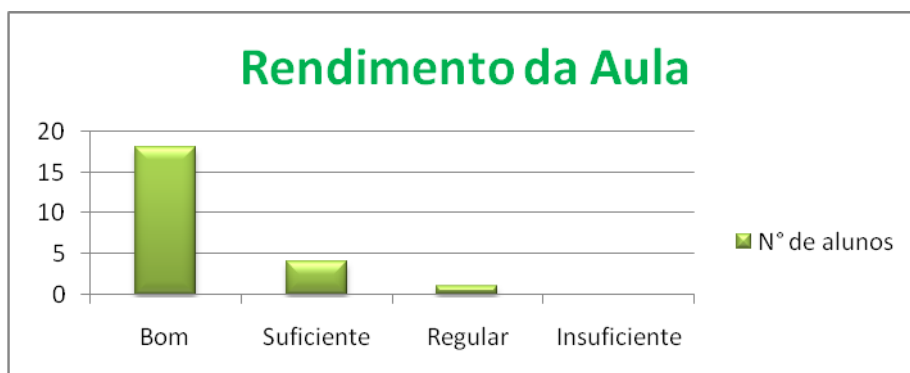


Figura 5: Gráfico relativo ao rendimento da aula

Os resultados obtidos foram satisfatórios e aulas como essa possuem diversos benefícios para o educando. Além de estimular a criatividade e o raciocínio, a Geometria Fractal é uma forma de motivar os educandos a aprender matemática.

## 6 REFERENCIAS

ÁVILA, Geraldo. **Euclides, Geometria e Fundamentos**. Rio de Janeiro: SBM, 2001.

BARBOSA, R. M. **Descobrendo a Geometria Fractal – para a sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

GARBI, Gilberto Geraldo. **A Rainha das Ciências: Um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática**. São Paulo: Livraria da Física, 2008.

MANDELBROT, Benoit. **The Fractal Geometry of Nature**. New York: W.H Freeman, 1983.



SALLUM, Élvia Mureb. **Fractais no ensino médio**. Revista do Professor de Matemática. N° 57, 2º quadrimestre, 2005.

SOARES, L.H. **Aprendizagem significativa na Educação Matemática: Uma proposta para aprendizagem da geometria básica**. João Pessoa: UFPB, 2008.