 ISSN 2177-9139

XX EREMATSUL

Encontro Regional de Estudantes de Matemática da Região Sul

A INSUFICIÊNCIA DOS NÚMEROS INTEIROS POR MEIO DE ATIVIDADE DIFERENCIADA COM MATERIAL MANIPULÁVEL

Karla Beatriz Vivian Silveira – karlasilveira@unipampa.edu.br
Fundação Universidade Federal do Pampa, Campus Itaqui, 97650-000 – Itaqui, RS, Brasil
Leonel Giacomini Delatorre – leoneldelatorre@unipampa.edu.br
Fundação Universidade Federal do Pampa, Campus Itaqui, 97650-000 – Itaqui, RS, Brasil

Resumo. *Este relato de experiência contempla uma atividade diferenciada, com material concreto, desenvolvida com as turmas do componente curricular de "Teoria Elementar dos Números" do curso de Matemática-Licenciatura da UNIPAMPA – Campus Itaqui, na qual foram apresentadas situações em que os acadêmicos puderam observar e constatar a insuficiência numérica do conjunto de inteiros (ℤ), verificando a importância de se ampliar este campo numérico, resultando na construção do campo racional (ℚ). Para tal, os acadêmicos foram distribuídos em grupos e receberam um "kit" contendo alguns canudos coloridos, representando medidas, e uma folha com questionamentos sobre proporções. Observou-se uma boa interação entre os acadêmicos e alguns resultados nos surpreenderam positivamente, tanto pelo processo cognitivo quanto pela representação algébrica. A atividade foi relevante ao passo que motivou os alunos a refletirem sobre os conjuntos numéricos em questão, bem como sobre o processo histórico envolvido.*

Palavras Chave: *Insuficiência Numérica dos Números Inteiros, Construção dos Números Racionais, Medidas, Material Concreto.*

1. INTRODUÇÃO

O Núcleo Docente Estruturante (NDE) do curso de Matemática-Licenciatura da Universidade Federal do Pampa – UNIPAMPA, Campus Itaqui, após estudos e reflexões, apresentou uma reestruturação curricular, na qual passou a ofertar o componente curricular "Teoria Elementar dos Números" que, como documentado no projeto político pedagógico[1] do referido curso, tem por objetivo retomar e ampliar, do ponto de vista histórico, noções de conjuntos numéricos. Por consequência desta adequação à nova matriz curricular, tal componente foi ofertado em duas turmas, a primeira destinada aos acadêmicos ingressantes no ano vigente, e a segunda aos acadêmicos em migração curricular.

Enquanto professores do referido curso, percebemos significativa dificuldade dos acadêmicos em reconhecer e trabalhar com os conjuntos numéricos. Nesse sentido, precisávamos pensar em uma atividade que, ao mesmo tempo, pudesse salientar as particularidades dos conjuntos – inteiros e racionais – e projetar a ideia de que, para uma

[1] Documento aprovado e vigente no ano de 2014.

situação prática, os números inteiros não seriam suficientes, havendo a necessidade de partirmos a um conjunto mais adequado, os números racionais.

Nesta perspectiva, relatamos neste trabalho a experiência com uma atividade planejada e aplicada, de forma integrada, às duas turmas de "Teoria Elementar dos Números", utilizando material concreto e contemplando noções importantes de comparação e medida, além de salientar, também, aspectos históricos que motivaram a ampliação/construção de conjuntos numéricos.

2. MEDIDAS E INSUFICIÊNCIA NUMÉRICA

Historicamente, remete-se a origem dos números naturais a um problema de contagem. Segundo Eves,

> [...] É provável que a maneira mais antiga de contar se baseasse em algum método de registro simples, empregando o princípio da correspondência biunívoca. Para uma contagem de carneiros, por exemplo, podia-se dobrar um dedo para cada animal. Podia-se também contar fazendo-se ranhuras no barro ou numa pedra, produzindo-se entalhes num pedaço de madeira ou fazendo-se nós numa corda. [...] (EVES, 2011, p. 26)

Assim como contar, o ato de medir é um procedimento intuitivo comum ao ser humano, e acredita-se ter motivado tanto a construção dos números racionais, que são alvo deste relato, quanto a dos números reais. Com base nestas informações, é importante salientar como se caracteriza o processo de medir. Segundo Caraça (1951, p. 29), o ato de medir "[...] consiste o comparar duas grandezas da mesma espécie – dois comprimentos, dois pesos, dois volumes, etc.". Além disso, o referido autor destaca que, para tal, é preciso estabelecer um padrão único de comparação, que é chamado de unidade de medida da grandeza (centímetro para comprimentos, grama para pesos, segundo para tempos,...) e, ainda, responder à questão – quantas vezes cabe uma grandeza noutra? Ou seja, ao medir, estamos realizando uma comparação onde uma das grandezas é fixa, a unidade.

Não obstante, ao realizar um processo de medição, o que se faz é representar, por meio de um número, a quantidade de vezes que a unidade cabe na outra grandeza de mesma espécie. O problema que se coloca, então, é quando esta representação numérica já não é mais possível a partir do conjunto numérico conhecido – os inteiros –, provocando um impasse histórico: ou entende-se que não é possível representar tal medida, ou há a necessidade de ampliar o campo numérico, originando os números racionais.

2.1 Material manipulável

Como já ressaltado, buscávamos uma atividade diferenciada que fosse atraente aos alunos e, principalmente, que pudesse promover a transição entre os conjuntos numéricos envolvidos, vindo de encontro aos objetivos do componente curricular de "Teoria Elementar dos Números". Acreditamos que a utilização de um material concreto possa cumprir este papel.

> [...] Por meio de discussões em sala de aula, professor e alunos (futuros professores) podem refletir sobre as relações possíveis, e os alunos, em interação com os materiais e com os colegas, provavelmente construirão as relações que o professor pretende que sejam construídas. Qualquer material pode servir para apresentar situações nas quais os alunos enfrentam reflexões entre os objetos que poderão fazê-los refletir, conjecturar, formular soluções, fazer novas perguntas, descobrir estruturas. [...] (PASSOS, 2009, p.80-81)

Para tanto, organizamos uma atividade com material de baixo custo, utilizando canudos de refrigerante – nas cores vermelho, azul, branco, amarelo e verde –, na qual cada cor representava uma medida de comprimento (Fig. 1), aliado a um formulário com questões, subdivididas em duas atividades – 1 e 2 –, que propunham comparações entre estas cinco medidas (Fig. 2).

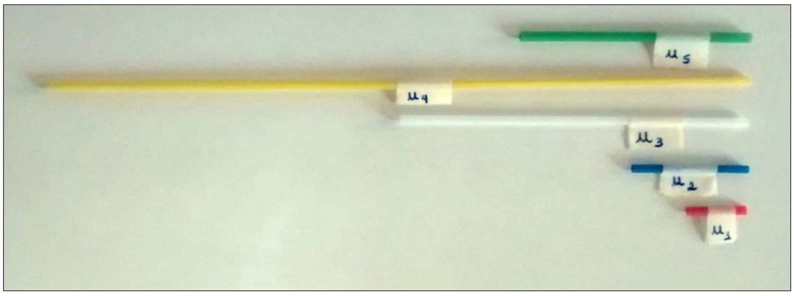

Figura 1 - Material manipulável.

A “Atividade 1” busca estabelecer uma unidade padrão u_1, sem menção ao Sistema Internacional de Unidades (SI) e, a partir desta, se desenvolvem ideias de medida. A esta atividade, determinamos apenas medidas inteiras, enquanto que, na “Atividade 2” – Questão 3 – procuramos fazer com que os acadêmicos percebessem que os números inteiros não eram mais suficientes para representar tais medidas.

Atividade 1

Questão 1. Quantas vezes a unidade u_1 cabe dentro da unidade u_2? Represente algebricamente.

Questão 2. Quantas vezes a unidade u_2 cabe dentro da unidade u_3? E a unidade u_1 dentro de u_3? Represente algebricamente.

Questão 3. Quantas vezes a unidade u_3 cabe dentro da unidade u_4? E a unidade u_2 dentro de u_4? E a unidade u_1 dentro de u_4? Represente algebricamente.

Atividade 2

Questão 1. Quantas vezes a unidade u_5 cabe dentro da unidade u_4? Represente algebricamente.

Questão 2. Quantas vezes a unidade u_2 cabe dentro da unidade u_5? Represente algebricamente.

Questão 3. Quantas vezes a unidade u_5 cabe dentro da unidade u_3? Represente algebricamente.

Figura 2 - Formulário de encaminhamento – Atividades 1 e 2.

É importante salientar que, ao final do enunciado de cada questão, aparece a expressão “Represente algebricamente”, ou seja, mais do que o aspecto geométrico, buscamos fazer com que os licenciandos atribuíssem significado algébrico àquilo que estavam investigando/experimentando. Acreditamos que, como afirma Passos (2009, p. 81), os conceitos “[...] serão formados pela ação interiorizada do aluno, pelo significado que dão às suas ações, às formulações que enunciam, às verificações que realizam”.

2.2 O contexto de sala de aula

Enquanto professores, preocupados em instigar o aluno a (re)pensar os conjuntos numéricos em questão, propomos uma atividade em que, por meio do material manipulável, pudéssemos direcionar discussões sobre a teoria dos números.

Sendo assim, para a execução, reunimos as duas turmas[2] de “Teoria Elementar dos Números”, no intuito de refletir sobre a necessidade prática e social da construção dos racionais, além de promover a troca de ideias e de experiências. Acreditamos que a realização desta proposta de trabalho possa ser dividida em quatro momentos.

Em um *primeiro momento*, destacamos alguns aspectos importantes relacionados à teoria dos números, permitindo aos acadêmicos entenderem o ato de medir como parte do processo histórico de construção. Esta primeira ação surge como preparação à atividade, visto que, segundo Fiorentini e Miorim (apud PASSOS, 2009, p.79), “[...] nenhum material é válido por si só”.

Para um *segundo momento*, subdividimos os acadêmicos em grupos mistos, em relação ao ano de ingresso, aos quais procuramos explicar o material a ser usado e entregamos o formulário de questões. Ao passo que as questões estavam sendo resolvidas, nós, professores, atuamos como orientadores no processo de investigação que estava sendo realizado, destacando aspectos importantes quanto às representações geométricas e as expressões algébricas associadas.

Em um *terceiro momento*, após a dinâmica, disponibilizamos espaço para discussões e reflexões acerca das observações que ocorreram nos grupos, no intuito de (re)interpretar, em um contexto matemático, o conhecimento empírico desenvolvido no ambiente de sala de aula. Acreditamos, assim como Ponte, Brocardo e Oliveira (2013, p. 41), que

> A fase de discussão é, pois, fundamental para que os alunos, por um lado, ganhem um entendimento mais rico do que significa investigar e, por outro, desenvolvam a capacidade de comunicar matematicamente e de refletir sobre o seu trabalho e o seu poder de argumentação. Podemos mesmo afirmar que, sem a discussão final, se corre o risco de perder o sentido da investigação.

Para o *último momento*, as turmas 10 e 11 foram separadas e cada professor deu continuidade à construção formal do conjunto dos números racionais.

3. RELATO DE EXPERIÊNCIA

Reunimos as turmas do componente curricular de “Teoria Elementar dos Números”, na sala 303 do Prédio Acadêmico I da UNIPAMPA – Campus Itaqui, perfazendo um total de 57 alunos. As turmas foram se alocando na sala, inicialmente, sem entender do que se tratava, muitos alunos acreditavam que teríamos uma reunião de curso, visto que na época nós, professores, estávamos com a responsabilidade da coordenação do curso.

Para dar início à aula, comunicamos que havíamos planejado uma aula conjunta e diferenciada, em que as turmas seriam convidadas a interagir. Iniciamos a abordagem teórica, utilizando um projetor multimídia, com explicações intercaladas e complementares realizadas pelos professores. Percebemos que a atividade gerou reações de surpresa e estranheza, o que se justifica, pois em nenhum momento do curso haviam trabalhado de tal forma.

Os acadêmicos foram organizados em 14 grupos, aos quais exigimos a participação de, pelo menos, um aluno de cada ingresso – 2012, 2013 ou 2014 –, gerando momentos de conflito, visto que alguns não queriam se separar de seus afins. No intuito de acalmá-los e fazer com que respeitassem nossa exigência, tivemos que “abrir o jogo” e comunicar que a atividade seria avaliada e contribuiria com a nota da primeira avaliação, em que muitos não obtiveram desempenho satisfatório. Com esta informação, conseguimos estabelecer a organização desejada.

[2] Turma 10: acadêmicos com ingresso em 2014; Turma 11: acadêmicos com ingresso em 2012 e 2013, em migração curricular.

Cada grupo recebeu um *kit* contendo o material manipulável e o formulário de questões. Em um primeiro momento, os membros se preocuparam em reconhecer o material, manuseando as medidas representadas pelos canudos para, então, iniciarem a leitura e resolução da primeira atividade, segundo seus níveis de compreensão. À medida que constatavam dificuldades em resolver as questões, buscavam – junto aos professores – questionar e argumentar as diversas linhas de pensamento.

Figura 3 - Dinamização da Atividade.

Nesse sentido, também solicitamos aos grupos o registro escrito – em linguagem não algébrica – da linha de raciocínio utilizada para chegar ao resultado. A análise do formulário entregue e o acompanhamento da atividade nos permitiram algumas conclusões importantes deste processo de comparação, principalmente, no que se refere a caminhos de resolução.

O primeiro fato que observamos foi a utilização da régua. Mesmo que tenhamos enfatizado o uso apenas das unidades representadas pelos canudos – u_1, u_2, u_3, u_4 e u_5 –, alguns grupos transformaram estas unidades em centímetros, com precisão em escala de milímetros, para então efetuar a comparação. Esse processo gerou alguns questionamentos do tipo:

– "Professor(a), a medida u_1 tem $2\,cm$ e a medida u_3 tem $12{,}2\,cm$ e fazendo a divisão na *calculadora* deu 6,1 vezes, a medida pode ser aproximada?"

Percebemos, assim, que alguns grupos não se desprenderam do processo de medida convencional, em que se utiliza o centímetro como unidade de medida padrão, havendo esta fuga dos inteiros, dada que a escala em milímetros é muito mais precisa do que a escala em u_1, por exemplo. Retomamos com estes grupos a ideia de utilizarmos apenas os canudos e que, até o momento, só conhecíamos os números inteiros.

Figura 4 - Desenvolvimento das Atividades.

Em relação à "Atividade 1", todos os grupos conseguiram desenvolver e entender a ideia proposta no trabalho. Além disso, os processos de resolução poderiam ser alvo de um estudo maior, visto que, apesar das diversas formas de interpretação, alcançamos o resultado esperado, tanto no aspecto da argumentação quanto da expressão algébrica.

Em relação à "Atividade 2", mantivemos uma abordagem que envolveu apenas os números inteiros, exceto na "Questão 3", na qual eles deveriam verificar que o referido conjunto já não era mais suficiente para representar a medida. Esperávamos, assim, um desenvolvimento similar ao apresentado abaixo (Fig. 5):

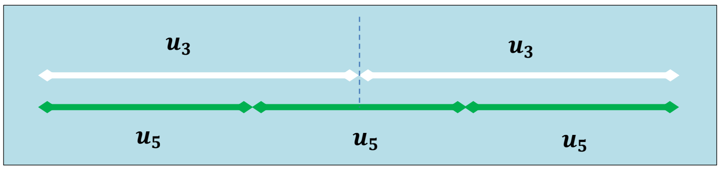

Figura 5 - Construção esperada.

Este processo necessita de um maior nível de abstração, visto que cada "kit" continha uma única peça de cada unidade. Então, eles teriam que imaginar: duas peças de u_3 e que estas equivaliam a três peças de u_5, isto é, algebricamente $2u_3 = 3u_5$.

Talvez por disponibilizarmos apenas uma peça de cada unidade, o processo de resolução utilizado pela maioria dos grupos consistiu em:

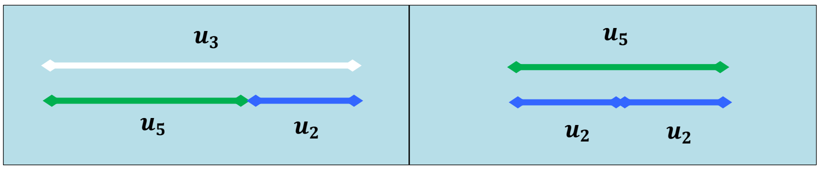

Figura 6 - Construção frequente.

no qual apresentaram uma solução mais rica em inter-relações entre as medidas, porém, restrita ao que puderam visualizar sem repetir peças.

Nesse sentido, a partir da comparação, foi possível convencê-los de que u_5 não caberia inteiramente dentro de u_3 – chegando ao objetivo da nossa atividade. Porém, seguindo a ideia de utilizarmos apenas números inteiros, a representação algébrica mais adequada ao processo por eles apresentado, seria algo do tipo:

$$u_3 = u_5 + u_2 = u_5 + metade\ (u_5).$$

o que não aconteceu ao avaliarmos o formulário, visto que eles se utilizaram de frações ou números na forma decimal para representar esta medida, fugindo à regra.

Ao término das atividades, no intuito de refletir sobre os resultados obtidos e de relacioná-los a teoria, abordada anteriormente, promovemos uma retomada das atividades, expondo o que nós acreditávamos que eles teriam feito e, principalmente, enfatizando a necessidade de ampliarmos o estudo a um novo conjunto numérico, os números racionais.

Como já mencionado, as duas turmas foram separadas, e cada professor trabalhou a construção e formalização dos racionais com sua respectiva classe. Neste ato, observamos que a mesma resistência que tivemos ao organizá-los em grupos, se repetiu ao separá-los.

4. CONSIDERAÇÕES

Esta atividade foi planejada, inicialmente, apenas como algo que fugisse aos padrões de aula teórica convencional, buscando motivar a participação dos acadêmicos que, muitas vezes, se mantinham indiferentes em aula, o que se refletia no desempenho escolar e nos preocupava, enquanto professores. Outras ideias foram se associando a esta, tais como: poderíamos usar um material diferenciado? Qual seria este material e de que forma poderíamos utilizá-lo? Seria interessante agrupar as turmas? Em caso afirmativo, como encaminhar uma atividade para, aproximadamente, 60 alunos? Ou seja, muitos aspectos precisaram ser (re)pensados neste contrato didático. A partir do que se propôs, e do que se desenvolveu efetivamente, podemos concluir que a atividade foi de extrema relevância em vários critérios.

Como professores, com formações distintas – Matemática e Ensino em Matemática –, atuando em um curso de licenciatura e ministrando um componente curricular comum, precisávamos promover uma aproximação entre as metodologias, o que se concretizou por meio do trabalho desenvolvido. Além do mais, essa interação entre os professores serviu para que as turmas – de distintos ingressos e experiências – se aproximassem, tanto do ponto de vista conceitual, quanto interpessoal.

Quanto ao material manipulável, o escolhemos por ser de baixo custo e por acreditar que a simplicidade não interferiu na qualidade do trabalho desenvolvido. Rêgo e Rêgo (2013, p. 44) apontam para "[...] a possibilidade de produção e de massificação de materiais de baixo custo e grande potencial didático, [...] contribuindo para a formação do senso estético e direcionando a atenção e a percepção para os aspectos cognitivos a serem trabalhados". Neste sentido, esta metodologia de trabalho diferenciada nos permitiu refletir sobre alguns pontos importantes na formação dos nossos acadêmicos, principalmente no que se refere ao desenvolvimento de um sentido abstrato que, pela análise da atividade, precisamos fortalecer.

REFERENCIAS

CARAÇA, B. de J. **Conceitos fundamentais da matemática**. Lisboa: Tipografia Matemática LTDA, 1951.

EVES, H. **Introdução à história da matemática.** Tradução de Hygino H. Domingues. 5 ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.

PASSOS, C. L. B. Materiais manipuláveis como recursos didáticos na formação de professores de Matemática. In: LORENZATO, S. (Org.). **Laboratório de Ensino de matemática na formação de professores.** Campinas: Autores Associados, 2009. Capítulo 4, p. 77-92.

PONTE, J. P. da; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula.** Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

RÊGO, R. M. do; RÊGO, R. G. do. Desenvolvimento e uso de materiais didáticos no ensino de matemática. In: LORENZATO, S. (Org.). **Laboratório de Ensino de matemática na formação de professores.** Campinas: Autores Associados, 2009. Capítulo 2, p. 39-56.