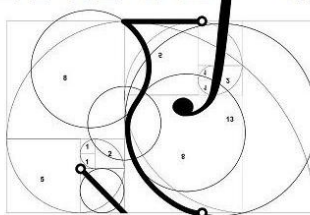


XX EREMAT SUL

Encontro Regional
de Estudantes de
Matemática da Região Sul



GRAFOS: UMA PROPOSTA DE ENSINO DE MATEMÁTICA DISCRETA UTILIZANDO COLORAÇÃO DE MAPAS

Edcarlos Vasconcelos da Silva – edcarlosvasconcellos@hotmail.com.br

Centro Universitário Franciscano – UNIFRA, Santa Maria, RS, Brasil

Caroline Conrado Pereira– caroline_conrado@ymail.com

Centro Universitário Franciscano – UNIFRA, Santa Maria, RS, Brasil

Vanilde Bisognin – vanildebisognin@gmail.com

Centro Universitário Franciscano – UNIFRA, Santa Maria, RS, Brasil

Resumo. Nesse trabalho é apresentado um relato de experiência sobre uma oficina de Grafos como uma possibilidade de ensino de Matemática Discreta utilizando a coloração de mapas. A oficina foi realizada com professores mestrando em Ensino de Matemática do Centro Universitário Franciscano, todos atuando na rede pública de ensino, o objetivo foi de capacitar os professores de modo que pudessem trabalhar com seus alunos os conceitos introdutórios da Matemática Discreta por meio da Teoria Grafos. A oficina teve duração de 04 horas e foi desenvolvida de forma lúdica cuja ação motivadora foi o trabalho com coloração de mapas.

Palavras Chaves: Grafos. Coloração. Mapas. Ensino. Matemática.

1 INTRODUÇÃO

Nesses tempos de mudanças nos paradigmas da educação, onde buscamos cada vez mais conectar o ensino com as demandas atuais, como por exemplo a tecnologia, é razoável que os professores busquem melhorar sua prática pedagógica tendo em vista que o modelo tradicional de ensino tem se mostrado fadigado quando se fala em termos de processos de ensino e aprendizagem.

Com a Matemática não é diferente, e é preciso o docente buscar metodologias de ensino que possam motivar o aluno a “querer aprender”, para isso o professor precisa contar com criatividade e ousadia, elaborando materiais didáticos que facilitem o processo de aprendizagem dos estudantes.

A Matemática Discreta é uma área que está presente em muitos cursos de nível superior, e no Ensino Médio ela é trabalhada com a Teoria dos Conjuntos, cheia de leis e algoritmos que muitas vezes causam repulsa nos alunos e aumenta o sentimento de fracasso neste.

Assim, o que se propõe neste relato é a continuidade do trabalho com Matemática Discreta no ensino Médio com apoio da Teoria dos Grafos. Os Grafos constituem em um subcampo da Matemática Discreta e Computacional, com muitas aplicações em diversas áreas do conhecimento como, por exemplo: Genética, química, pesquisa operacional, telecomunicações, engenharia elétrica, redes de computadores, conexão de voos aéreos, etc.

Pesquisadores como Jurkiewicz e Muniz Junior (2007, p. 02) justificam o trabalho com Grafos no Ensino Médio afirmando que esta teoria “permite de forma simples e contextualizada, a construção de ideias básicas que permeiam os processos algorítmicos”. Vale lembrar que a Matemática do Ensino Médio é recheada de leis e algoritmos, então o trabalho com Grafos pode ter potencial no sentido de fazer com que o aluno possa compreender melhor a linguagem matemática e ser capaz de aplicar isso no seu dia-a-dia.

Neste sentido, este relato apresenta a experiência da aplicação de uma oficina de coloração de mapas com o uso da Teoria de Grafos, em especial os Grafos Eulerianos, o objetivo era embasar os acadêmicos (que também são professores de Matemática da Educação Básica) do mestrado para que pudessem conhecer e futuramente aplicar atividades envolvendo Grafos na resolução de problemas matemáticos com seus alunos da Educação Básica.

2 OS GRAFOS E O ENSINO DA MATEMÁTICA

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 2002), na área de Ciências da Natureza, Matemática e Suas Tecnologias, existem três grandes competências que os alunos devem adquirir ao final do Ensino Médio quais sejam: representação e comunicação, onde o aluno desenvolve sua capacidade de ler, interpretar e produzir textos; investigação e compreensão, competência esta que o estudante se utiliza do pensar científico para resolver problemas, e; contextualização, onde o aluno pensa e reflete o seu mundo de acordo com o conhecimento científico.

Essas competências estabelecem conexão com a Teoria dos Grafos e Jurkiewicz e Muniz Junior (2007) destacam as seguintes potencialidades para cada competência:

Tabela 01 – Competências e Potencialidades no Ensino da Matemática

Competências	Potencialidades
Representação e Comunicação	Existência de problemas que requerem análise, resolução e discussão das respostas obtidas, inserindo os alunos em situações onde precisam perceber que ter respostas para os problemas não significa ter a melhor solução para resolvê-los, como ocorrerá nos problemas dos ciclos eulerianos, de dominação e de caminho mínimo; a possibilidade de expressar sua estratégia para resolver o problema antes de conhecer uma técnica, o que não é possível sem a representação e comunicação.
Investigação e compreensão	Estão no cerne deste trabalho, onde a dinâmica já apresentada anteriormente em que o aluno tenta resolver e explica como o fez, seguida da apresentação dos teoremas e algoritmos utilizados para resolver os problemas e finalizada com uma discussão concluindo o trabalho, contribuem significativamente para o desenvolvimento desta habilidade
Contextualização	Diversos problemas apresentados nas atividades são realmente contextualizados, pois, utiliza diversas ferramentas aqui trabalhadas, para resolver problemas reais

Fonte: Jurkiewicz e Muniz Junior (2007, p. 04)

A Teoria dos Grafos, embora não esteja contemplada nos PCN como conteúdo específico do saber tal qual como Geometria, Funções, etc, é citada nas Orientações Curriculares Nacionais (BRASIL, 2006, p. 94) como mecanismo para explorar outros conteúdos matemáticos, “No ensino médio, o termo “combinatória” está usualmente restrito ao estudo dos problemas de contagem, mas esse é apenas um de seus aspectos”. PCN destacam também que “outros tipos de problemas poderiam ser trabalhados na escola, um exemplo clássico é problema das pontes de Königsberg, tratado por Euler...” os problemas desse nível podem ser utilizados para trabalhar várias competências na Matemática.

Conforme se verifica, o uso da Teoria dos Grafos no Ensino Médio tem potencial para o desenvolvimento das competências estabelecidas nos PCN, bem como das habilidades dos alunos em resolver determinados problemas.

Experiências positivas com uso desta teoria na educação básica tem mostrado resultados estimulantes como é o caso de Costa (2013) que trabalhou a Teoria dos Grafos utilizando como tema motivador o conhecido problema chamado de *desafio interessante* em que os alunos investigam um assassinato em uma grande mansão e utilizam os caminhos eulerianos para solucionar o problema. Após a atividade motivadora a autora trabalha os demais conceitos de Grafos eulerianos e canaliza o estudo para temas focados dentro da Matemática Discreta.

3 OS GRAFOS E A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Denomina-se Grafo ao conjunto não vazio formado por pontos ou vértices conectados por retas chamadas de arestas. Assim, matematicamente representando, um grafo G é formado por um par $(V(G), A(G))$ onde $V(G)$ é um conjunto finito e não vazio de vértices e $A(G)$ é um conjunto de arestas conectadas aos pares de vértices $V(G)$. (MALTA 2008; COSTA, 2011)

A Figura 01 seguinte apresenta alguns exemplos de Grafos:

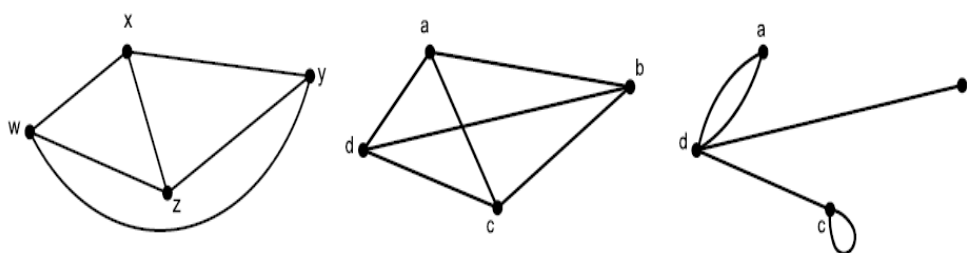


Figura 01 – Exemplos de Grafos: pontos representam os vértices e as retas são as arestas.
Fonte: Costa (2011, p. 21)

O contexto histórico dos Grafos remonta o clássico problema das Pontes de Königsberg que foi resolvido pelo matemático Leonhard Euler (1707-1783) em 1736, cuja solução negativa de Euler originou a atual Teoria dos Grafos.

O problema das Pontes de Königsberg:

“A cidade de Königsberg (atual Caliningrado), na região da Prússia, estava localizada nas margens e em duas ilhas do rio Preguel, as quais eram ligadas por sete pontes. A discussão entre os moradores da cidade era a seguinte: É possível sair de casa, atravessar cada ponte apenas uma vez e retornar à casa?” (COSTA, 2011, p. 26)

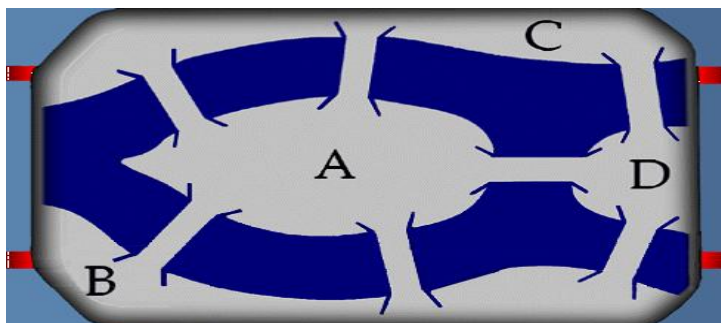


Figura 02 – As pontes de konigsberg.

Fonte: Adaptado de Malta (2008)

Conforme Malta (2008) e Costa (2011) Euler provou que não seria possível sair de uma ponte e cruzar por todas as demais sem que repetisse o caminho, nascia assim a Teoria de Grafos. A solução apresentada por Euler, em forma de Grafo, foi a seguinte:

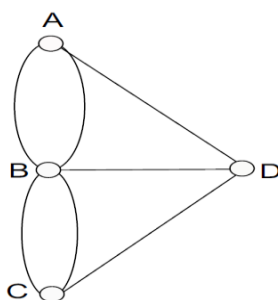


Figura 03 – Solução para o problema das pontes de konigsberg.

Fonte: Malta (2008)

Segundo Malta (2008) a utilidade da Teoria dos Grafos reside no fato de poder buscar soluções de inúmeros problemas de vários campos que podem ser multidisciplinar com a Matemática, como é o caso da coloração de mapas, utilizado para a produção desta oficina que é apresentado neste relato.

A coloração de mapas é o processo de pintar mapas (países, cidades, regiões, etc) utilizando a Teoria da Coloração Mínima dos Grafos pintando uma área tal que as áreas vizinhas sejam formadas por cores diferentes utilizando uma quantidade mínima de cores, descrita por Feofiloff, Kohayakawa e Wakabayashi (2011) como “uma coloração do conjunto de vértices de um grafo é uma atribuição de cores aos vértices tal que vértices adjacentes recebem cores diferentes.”. A coloração de um grafo pode ser feita atribuindo cores diferentes para cada vértice do grafo. Dizemos que a coloração é mínima quando o número de cores é o menor possível. (FEOFILOFF; KOHAYAKAWA; WAKABAYASHI, 2011, p. 29)

Assim, o trabalho desenvolvido neste relato envolveu a coloração de mapas utilizando o Teorema das Quatro Cores. Sousa (2001) escreve que esta foi uma Conjectura proposta por De Morgan em 1852 e dizia que apenas quatro cores são suficientes para colorir um mapa qualquer, sem que duas áreas de mesma cor sejam vizinhas por meio de uma fronteira. Este teorema foi provado em 1972 pelos matemáticos Appel e haken, não convém neste artigo provar tal teoria, mas sim apenas mostrar sua aplicação.

A título de exemplo mostra-se o mapa da América do Sul, colorido com apenas 4 cores:



Figura 04 – Mapa da América do Sul colorido com 4 cores.

Fonte: Ministério da Educação (BRASIL, 2014)

Observe que, áreas de cores iguais não estão em região de fronteira uma com a outra, estando de acordo com o Teorema das 4 Cores de De Morgan.

Essa foi a motivação para a elaboração da oficina com professores cursistas do mestrado em Ensino de Matemática. O trabalho com mapas é uma atividade multidisciplinar e, dependendo dos objetivos da aula, pode-se trabalhar Matemática, Geografia e História.

Com relação ao ensino de Matemática por meio de Grafos existem muitas associações aos conteúdos da Educação Básica, conforme já foi citado acima alguns, entretanto o estudo de Grafos não estão contemplados nos Parâmetros Curriculares Nacionais, fato esse que inviabiliza um trabalho amplo com foco em sala de aula.

No entanto, cabe ressaltar que os PCN deixam uma abertura para que o docente utilize conteúdos que contemplem ampliação do horizonte do conhecimento do aluno “[...] a crescente valorização do conhecimento e da capacidade de inovar demanda cidadãos capazes de aprender continuamente, para o que é essencial uma formação geral e não apenas um treinamento específico.” (BRASIL, 1998, p. 06)

O que se pode interpretar dos PCN é que o docente pode trabalhar conteúdos extras, uma vez que, o objetivo é fazer com que o aluno aprenda os conteúdos principais, e para tanto, o docente deve usar ferramentas e estratégias adequadas para atingir tal objetivo e o uso dos Grafos se adéqua a essa situação.

4 APLICAÇÃO DA OFICINA

Inicialmente, foi passado um vídeo para os participantes, que trata sobre a origem da teoria dos grafos, além de aplicações. Logo após, foram realizadas as atividades da oficina, onde cada grupo recebeu folhas, lápis de cor e giz de cera, para trabalhar nas atividades propostas.

Atividade 1 : Pinte o mapa de forma que regiões (estados ou países) que fazem fronteira não tenham a mesma cor. Use o menor número de cores possíveis para pintar as regiões. Na figura 05, a seguir, são apresentadas as respostas do grupo A.

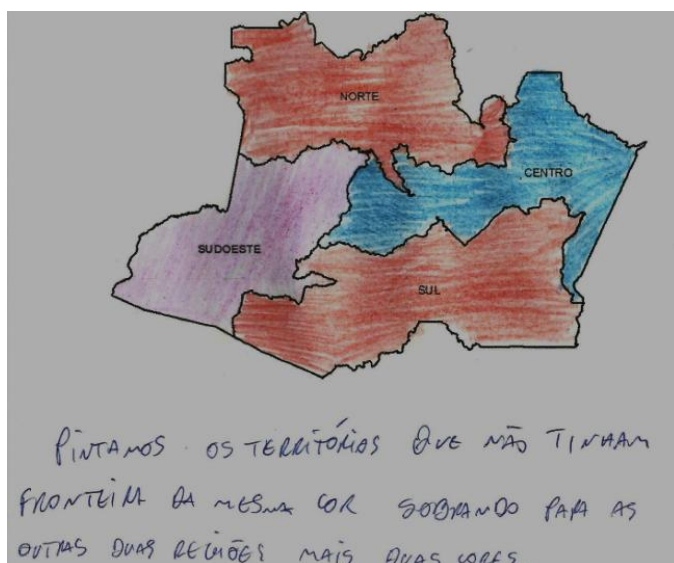


Figura 05: Registros do grupo A
 Fonte: Autores

Nessa atividade os estudantes registraram e coloriram os mapas, usando o número menor de cores possíveis. O grupo A utilizou três cores para colorir os mapas, respeitando a condição que países limítrofes não podem ser pintados da mesma cor.

Atividade 2 : Pinte o mapa com o menor número possível de cores, de forma que regiões limítrofes não tenham a mesma cor. Descreva de que forma começou a pintar as regiões para que a condição se mantenha.

Os participantes da oficina do grupo B, observaram que começando pelas regiões com maior número de fronteiras, poderiam pintar com o menor número de cores possíveis. Como mostra na figura 06, os participantes utilizaram apenas 4 cores.



Figura 06: Registros do grupo B
 Fonte: Autores

Atividade 3: Construa um grafo a partir dos mapas trabalhados nas atividades anteriores, considerando que as regiões tornam-se vértices e os limites (fronteira) as arestas.

Nessa atividade mostra que os participantes conseguiram compreender o conceito de vértices que foram representados pelos países, e as arestas são as fronteiras de acordo como a figura 07.

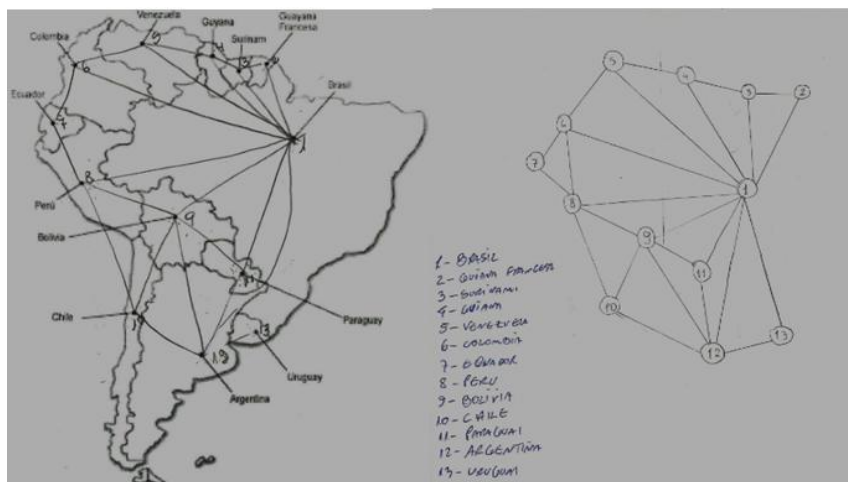


Figura 07: Registro sobre o conceito de vértice

Fonte: Autores

Atividade 4: Colorir os vértices do grafo encontrado, de modo que vértices adjacentes não tenham a mesma cor. De acordo com a figura 4, o grupo coloriu os grafos com apenas 4 cores.

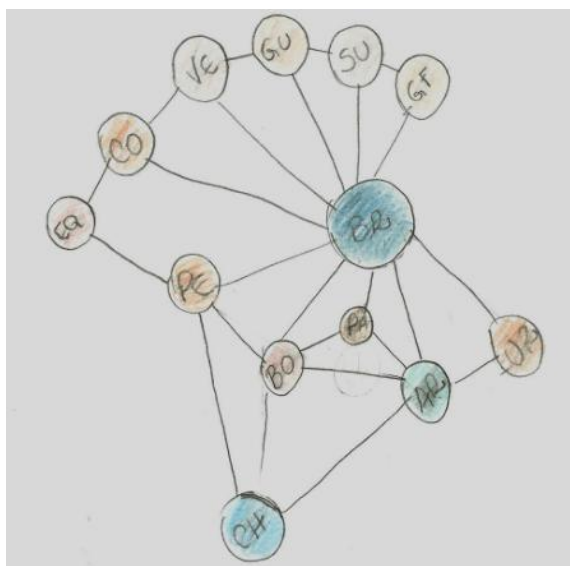


Figura 08: Análise do grupo D

Fonte: Autores

Atividade 5: Gerar estratégias para verificar qual o número mínimo cores utilizado para colorir os grafos. Por onde começar a colorir?

Conforme mostram as figuras 5, os participantes da oficina verificaram que o número de cores mínimas para pintar um mapa é 4 cores e devem começar com os territórios (vértices) com maior número de arestas (fronteiras).

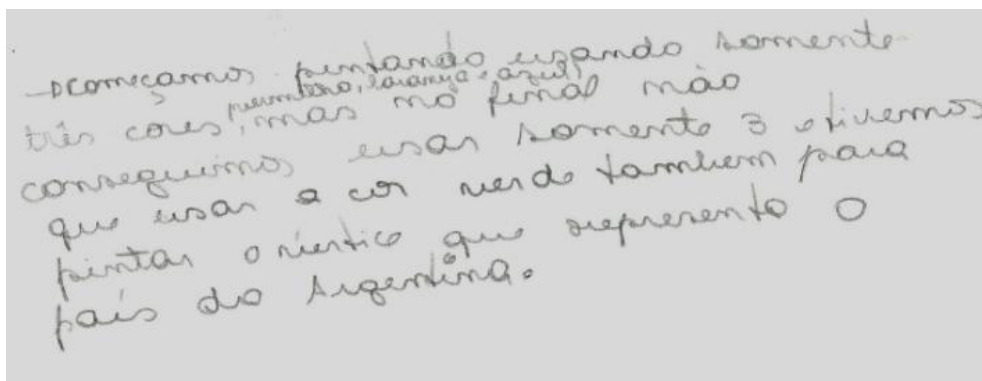


Figura 09: Análise do grupo B
Fonte: Autores

A proposta de atividade com Grafos na formação continuada demonstrou ser uma alternativa de qualidade para o professor preparar uma aula de caráter interdisciplinas com outras áreas do conhecimento como, por exemplo, a Geografia (pelos mapas) ou inserindo outras disciplinas conforme o objetivo da aula.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O conteúdo Grafos não era do conhecimento dos participantes da oficina, relataram que não tinham o conhecimento deste ramo da matemática, inclusive na graduação não tiveram. Nessa oficina foram analisados conceitos de vértice, arestas de forma contextualizada e com aplicação.

A partir desta oficina foi observado o interesse dos participantes em introduzir estes conceitos e a sua aplicabilidade para as turmas onde são professores regentes. Com o trabalho desenvolvido foi possível introduzir o assunto de grafos de forma significativa.

6 REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. **O Teorema das 4 Cores**. 2014. Disponível em: http://webeduc.mec.gov.br/portaldoprofessor/matematica/grandes_temas/grandestemaseproblemas-html/audio-4-cores-br.html Acesso em: 20.02.14

_____. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio**. – Brasília: MEC. Vol. 3, 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf> Acesso em: 13.02.14

_____. Secretaria da Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio; Volume 2**. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2006

_____. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais+ (PCN+)** – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2002.

COSTA, C. S. Matemática Discreta no Ensino Médio: Um trabalho com grafos eulerianos. **Relatórios de Pesquisa em Engenharia de Produção**, v. 13, série B, n. 02, p. 8-19, 2013. Disponível em:

<http://www.producao.uff.br/conteudo/rpep/volume132013/RelPesq_V13_2013_B02.pdf>
Acesso em: 10 Jun 14

COSTA, P. P. **Teoria de Grafos e suas Aplicações**. 2011. Dissertação (mestrado). Programa de Mestrado Profissional em Matemática. Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita. 2011. Disponível em: www.ic.uff.br/~julius/icc/grafos.pdf Acesso em: 13.02.14

FEOFILOFF, P. KOHAYAKAWA, Y. WAKABAYASHI, Y. **Uma Introdução Sucinta à Teoria dos Grafos**. USP. 2011. Disponível em: <http://www.ime.usp.br/~pf/teoriadosgrafos/>
Acesso em: 10.02.14

JURKIEWICZ, S.; MUNIZ JUNIOR, I. **Qual é o menor caminho? (Conceitos, aplicações e experiências no ensino médio com Teoria dos Grafos & Algoritmos)**. XXXIX SBPO, Fortaleza, ago, 2007. Disponível em:
<<http://www.din.uem.br/sbpo/sbpo2007/pdf/arq0002.pdf>> Acesso em: 10 Jun 14

MALTA, G. H. S. **Grafos no Ensino Médio: Uma inserção possível**. 2008. Dissertação (mestrado). Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática. UFRGS. 2008. Disponível em: www.mat.ufrgs.br/ppgem/produto_didatico/sequencias/08glaucia.PDF
Acesso em: 10.02.14

SOUSA, L. O Teorema das Quatro Cores. **Millenium** - Revista do ISPV, n. 24, 2001. Disponível em <http://www.ipv.pt/millenium/Millenium24/12.pdf>. Acesso em: 20.02.14