XX EREMAT - Encontro Regional de Estudantes de Matemática da Região Sul
Fundação Universidade Federal do Pampa (UNIPAMPA), Bagé/RS, Brasil. 13-16 nov. 2014. ISSN 2177-9139

COMPARAÇÃO ENTRE ALGUMAS FERRAMENTAS DE ANÁLISE REAL DE UMA VARIÁVEL COM SEUS ANÁLOGOS EM ESPAÇOS MÉTRICOS E O TEOREMA DO PONTO FIXO.

Maicon Luiz Collovini Salatti - luizcollovini@gmail.com
Universidade Federal de Pelotas, Polo de Arroio dos Ratos, 96740-000 - Arroio dos Ratos, RS, Brasil.
Luis Felipe Kiesow de Macedo - felipekiesow@gmail.com
Universidade Federal de Pelotas, Campus Capão do Leão, 96160-000 - Pelotas, RS, Brasil.

Resumo. *Este trabalho tem o objetivo de realizar uma comparação entre algumas ferramentas que são estudadas durante um primeiro curso de Análise Real e suas generalizações para o conceito chamado Espaços Métricos. As comparações são simplesmente a exibição em paralelo, das definições de conceitos, que possuem seus análogos tanto em análise real de uma variável como para espaços métricos em geral. A ênfase destas comparações é focalizada na noção de Completude, como por exemplo, o conjunto dos números reais forma um corpo ordenado completo. Alguns espaços métricos também possuem a propriedade de serem completos, onde é discutido fatos em torno deste conceito. Ainda, é exibida a demonstração do chamado Teorema do Ponto Fixo no caso de uma dimensão. Em seguida é exibida a demonstração desse teorema para o caso de espaços métricos em geral.*

Palavras Chave: *Análise Real, Espaços Métricos, Completude, Teorema do Ponto Fixo.*

1 INTRODUÇÃO

A "Análise Real - a qual na sua forma mais básica é o estudo rigoroso das ideias do Cálculo" BLOCH (2011), onde dentro desse ponto de vista do tratamento rigoroso das ideias do Cálculo, para se introduzir os primeiros conceitos que são objetos de estudo num curso de análise real é necessário realizar uma abordagem do conjunto dos números reais de forma um pouco mais rigorosa, deixando de modo bem explícito, as propriedades que existem sob esse conjunto e como elas devem ser usadas. Esse processo de detalhar de modo rigoroso as propriedades dos números naturais é algo que veio da necessidade de demonstrar teoremas de importância fundamental para o cálculo, como por exemplo, o teorema do valor intermediário. "Ainda, (BLOCH, 2011) afirma que o desenvolvimento de um tratamento rigoroso dos números reais foi o resultado do desejo de proporcionar uma base sólida para o cálculo; sem um bom entendimento dos números reais não seria possível obter provas completas de resultados importantes". Normalmente esta abordagem mais rigorosa dos números reais é realizada exibindo os axiomas de corpo, corpo ordenado e finalmente apresentando o axioma fundamental da análise, que é o chamado Axioma do Supremo. A partir daí são trabalhados os conceitos de sequência, séries numéricas, limites e continuidades de funções reais, diferenciação e integração de funções definidas em subconjuntos de $\mathbb{R}$ tomando valores em $\mathbb{R}$.

Algo semelhante à ideia de completude do conjunto dos números reais ocorre com espaços métricos em geral, onde se busca a noção de Espaço Métrico Completo. "Vamos ver, no entanto, a completude como uma propriedade dos espaços métricos que é completamente independente de qualquer ordem que o espaço possa ter; de fato, muitos dos espaços métricos completos interessantes não são equipados com qualquer ordem padrão" (SEARCOID, 2007). Onde muito dos conjuntos equipados com uma estrutura de espaço métrico não possuem uma relação de ordem definida; e mesmo assim pode-se obter uma noção de completude para eles. No que diz respeito à ideia de completude, esta é uma ferramenta quase que exclusiva da análise.

2 METODOLOGIA E MATERIAIS

O trabalho consiste numa exposição dos conceitos que são objetos de estudo. A metodologia foi, basicamente, a pesquisa bibliográfica buscando atingir o objetivo de realizar a comparação de algumas ferramentas definidas tanto no contexto de análise real como em espaços métricos. Com a exibição da demonstração do teorema do ponto fixo, visa-se dar um exemplo de que vários conceitos estudados em análise real de uma variável podem ser facilmente adaptados e terem suas demonstrações no caso mais geral, que é realizada no contexto dos espaços métricos. Em particular, as demonstrações realizadas foram pesquisadas em (FERREIRA, 2008), (LIMA, 2013), (LIMA, 2011) e (SEARCOID, 2007) e acrescentado alguns detalhes elementares omitidos nestas demonstrações.

3 ESPAÇOS MÉTRICOS

Inicialmente é exibido a definição de espaço métrico e mostrado alguns exemplos.

Definição 3.1 *(métrica)*
Dado um conjunto M, uma *Métrica em M* é uma função $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ possuindo as propriedades:

$$d(a,b) \geq 0; \tag{1}$$
$$d(a,b) = 0 \text{ se, e somente se, } a = b; \tag{2}$$
$$d(a,b) = d(b,a); \tag{3}$$
$$d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b). \tag{4}$$

para todos $a,b,c \in M$. Observe que $d(a,b) \in \mathbb{R}$, que $\leq$ e $+$ representam respectivamente a relação de ordem e a operação de adição usual definidas em $\mathbb{R}$. $\Diamond$

Definição 3.2 *(espaço métrico)*
Dado um conjunto M e uma métrica d em M, um *Espaço Métrico* é o par $\langle M, d\rangle$. $\Diamond$

Exemplos:
O conjunto $\mathbb{R}$ com $|| : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $d(a,b) := |a-b|$ define uma estrutura métrica sob o conjunto dos números reais, que podemos representar por $\langle \mathbb{R}, ||\rangle$, onde $||$ é a função valor absoluto em $\mathbb{R}$.
O conjunto $\mathbb{R}^n$ com $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $d(a,b) := \sqrt{(a_1 - b_1) + \cdots + (a_n - b_n)}$ onde $a = (a_1, \cdots, a_n)$ e $b = (b_1, \cdots, b_n)$ define uma estrutura métrica sob o espaço euclidiano $n-$dimensional. Existem outras duas funções diferentes que tornam o $\mathbb{R}^n$ um espaço métrico. São elas: $d^{'}(a,b) := |a_1 - b_1| + \cdots + |a_n - b_n|$ e $d^{''}(a,b) := \max\{|a_1 - b_1|, \cdots, |a_n - b_n|\}$. Assim temos os espaços métricos $\langle \mathbb{R}^n, d\rangle$, $\langle \mathbb{R}^n, d^{'}\rangle$, $\langle \mathbb{R}^n, d^{''}\rangle$.
Dado um conjunto qualquer A define-se $d : A \times A \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$d(a,b) := \begin{cases} 0 & \text{se } a = b \\ 1 & \text{se } a \neq b \end{cases}$$

que faz com que qualquer conjunto torne-se trivialmente um espaço métrico.

Para uma demostração completa de que $\langle \mathbb{R}, || \rangle$ e $\langle \mathbb{R}^n, d \rangle$ são espaços métricos consulte (Ferreira 2008), páginas: 16, 17 e 18. Para discussões a respeito das outras métricas apresentadas, assim como exemplos adicionais de espaços métricos, consulte o primeiro capítulo de (Lima 2011) ou (Searcoid 2007).

4 ELEMENTOS DE ANÁLISE REAL DE DIMENSÃO 1 E SEUS EQUIVALENTES EM ESPAÇOS MÉTRICOS.

Na sequência serão exibidos alguns conceitos de análise real e seus análogos em espaços métricos. Os resultados discutidos aqui não serão demonstrados e será dada uma referência logo abaixo do resultado então discutido onde se pode encontrar a demonstração destes.

Definição 4.1 *(sequência)*
Dado um conjunto A chama-se de uma Sequência de elementos de A a uma função $x : \mathbb{N} \longrightarrow A$, onde escreve-se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em vez da notação usual de uma função, x_n, ao invés de $x(a)$ para o valor $x_n \in A$ para cada $n \in \mathbb{N}$. $\Diamond$

Definição 4.2 *(sequência limitada)*
Dado uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}$, diz-se que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é *Limitada* se existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $|x_n| \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Dado um espaço métrico $\langle M, d \rangle$ uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em M, diz-se que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é *Limitada* se existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $d(x_n, x_m) \leq c$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$. $\Diamond$

Definição 4.3 *(limite de uma sequência)*
Dado uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}$, diz-se que o elemento $a \in \mathbb{R}$ é *Limite* de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, quando dado $\varepsilon > 0$, existe $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n - a| < \varepsilon \tag{5}$$

para todo $n > n(\varepsilon)$.

Dado um espaço métrico $\langle M, d \rangle$ e uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em M, diz-se que o elemento $a \in M$ é *Limite* de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, quando dado $\varepsilon > 0$, existe $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_n, a) < \varepsilon \tag{6}$$

para todo $n > n(\varepsilon)$. $\Diamond$

Ainda dentro do ponto de vista da observação existência de corpos ordenados completos, um teorema de grande importância para a análise e que inclusive é considerado como o ponto inicial da conceituação rigorosa dos números reais cuja descoberta é devida a Richard Dedekind é o seguinte.

Teorema 4.1 *(Dedekind)*
Toda sequência monótona limitada números reais é convergente.

Demonstração: Esta pode ser encontrada em Lima 2013, p: 26. “Foi tentando demonstrá-lo ao preparar suas aulas, na metade do século 19, que R. Dedekind percebeu a necessidade de uma conceituação precisa de número real”(LIMA 2013).

Segue-se como corolário desse, o teorema de Bolzano-Weierstrass que desempenha um papel fundamental em análise.

Teorema 4.2 *(Bolzano-Weierstrass)*
Toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente.

Demonstração: Esta pode ser encontrada em Lima 2013, p: 26.

Definição 4.4 *(sequência de Cauchy)*
uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}$ é dita *Uma Sequência de Cauchy* se ela possui a propriedade: dado $\varepsilon > 0$, existe $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n - x_m| < \varepsilon \tag{7}$$

para todo $m, n > n(\varepsilon)$.

Uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ num espaço métrico $\langle M, d\rangle$ é dita *Uma Sequência de Cauchy* se ela possui a propriedade: dado $\varepsilon > 0$, existe $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon \tag{8}$$

para todo $m, n > n(\varepsilon)$. $\lozenge$

Teorema 4.3 *(propriedade de uma sequência convergente)*
Toda sequência convergente é de Cauchy.

Teorema 4.4 *(limitude de uma sequência de Cauchy)*
Toda sequência de Cauchy é limitada.

Teorema 4.5 *(propriedade de uma sequência de Cauchy)*
Uma sequência de Cauchy que possui uma subsequência convergente é convergente e converge para o mesmo limite da subsequência.

Demonstração: veja as demonstrações de (3), (4) e (5) em Lima 2011, páginas 161, 162 e 163.

Definição 4.5 *(espaço métrico completo)*
Um espaço métrico $\langle M, d\rangle$ é dito *Um Espaço Métrico Completo*, se toda sequência de Cauchy converge em M.

Definição 4.6 *(ponto de acumulação)*
Dado $X \subset \mathbb{R}$ o elemento $a \in \mathbb{R}$ é dito *um Ponto de Acumulação de X* quando dado $\varepsilon > 0$ existe $x(\varepsilon) \in X$ tal que

$$|x(\varepsilon) - a| < \varepsilon \tag{9}$$

Um espaço métrico $\langle M, d\rangle$ $X \subset M$ o elemento $a \in M$ é dito *um Ponto de Acumulação de X* quando dado $\varepsilon > 0$ existe $x(\varepsilon) \in X$ tal que

$$d(x(\varepsilon), a) < \varepsilon \tag{10}$$

O conjunto dos pontos de acumulação de um conjunto X é denotado por X'. $\lozenge$

Definição 4.7 *(limite de uma função))*
Dado $X \subset \mathbb{R}$, uma função $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X'$; diz-se que o elemento $l \in \mathbb{R}$ é *Limite de f quando x tende a a*, se, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|x - a| < \delta \text{ implica } |f(x) - l| < \varepsilon \tag{11}$$

para todo $x \in X$ com $|x - a| < \delta$.
Dado os espaços métricos $\langle M, d\rangle$ e $\langle M, d\rangle$, $X \subset M$, uma função $f\colon X \longrightarrow N$ e $a \in X'$; diz-se que o elemento $l \in N$ é *Limite de f quando x tende a a*, se dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x,a) < \delta \text{ implica } d(f(x), l) < \varepsilon \tag{12}$$

para todo $x \in X$ com $d(x,a) < \delta$. $\Diamond$

Definição 4.8 *(função contínua)*
Dado $X \subset \mathbb{R}$, uma função $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X$; diz-se que f é *Contínua no ponto a* quando dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|x - a| < \delta \text{ implica } |f(x) - f(a)| < \varepsilon \tag{13}$$

para todo $x \in X$ com $|x - a| < \delta$.
Dado os espaços métricos $\langle M, d\rangle$ e $\langle M, d\rangle$, $X \subset M$, uma função $f\colon X \longrightarrow N$ e $a \in X$; diz-se que f é *Contínua no ponto a* quando dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x,a) < \delta \text{ implica } d(f(x), f(a)) < \varepsilon \tag{14}$$

para todo $x \in X$ com $d(x,a) < \delta$. $\Diamond$

Sob o ponto de vista de prestar atenção aos detalhes mais refinados da teoria do cálculo "é surpreendente como muitas pessoas pensam que análise consiste em demonstrações difíceis de teoremas óbvios"KORNER (2003). O conjunto dos números reais forma um corpo ordenado completo, dito pelo axioma do supremo, veja por exemplo, em Lima 2012 cap.3, p: 80. A noção de completeza é fundamental no que diz respeito ao bom comportamento da noção de limite e continuidade de funções definidas em subconjuntos de $\mathbb{R}$ e tomando valores em $\mathbb{R}$. Como exemplo desse fato "KORNER (2003) descreve o seguinte: Teorema 1.1. (teorema do valor constante). Se $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável e $f'(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ então f é constante. Se este teorema é "intuitivamente claro" sobre $\mathbb{R}$, ele deveria ser intuitivamente claro sobre $\mathbb{Q}$. A mesma observação se aplica a outro teorema "intuitivamente claro". Teorema 1.2. (teorema do valor intermediário). Se $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua, $b > a$ e $f(a) \geq 0 \geq f(b)$, então existe um c com $b \geq c \geq a$ tal que $f(c) = 0$. No entanto, se trabalharmos sobre $\mathbb{Q}$ ambos os teoremas desaparecerão como uma nuvem de fumaça".

Onde o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais embora seja um corpo ordenado, este não forma um corpo ordenado completo.

5 MÉTODO DAS APROXIMAÇÕES SUCESSIVAS, CONTRAÇÕES E O TEOREMA DE PONTO FIXO.

O método das Aproximações Sucessivas "conceitualmente bastante simples, que tem inúmeras aplicações à Geometria, à Análise e ao Cálculo Numérico LIMA (2007)", assim como várias outras ferramentas definidas na reta, ela também possui sua versão para espaços métricos. Este será demonstrado e utilizado na demonstração do teorema do ponto fixo. Lembrando que ambas as demonstrações serão realizadas tanto na reta como para espaços métricos em geral.

Teorema 5.1 *(método das aproximações sucessivas, caso $\mathbb{R}$)*
Dado uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}$ com a propriedade:

$$|x_{n+1}-x_n| \leq \lambda|x_n - x_{n-1}| \tag{15}$$

para todo $n\in\mathbb{N}$, com $\lambda\in[0,1)$. Nessas condições, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy e portanto convergente.

Demonstração: Começa-se observando que $|x_3-x_2|\leq\lambda|x_2-x_1|$ usando (15). Novamente por (15), escreve-se $|x_4-x_3|\leq\lambda|x_3-x_2|$. Agora multiplicando-se $|x_3-x_2|\leq\lambda|x_2-x_1|$ por λ temos $\lambda|x_3-x_2|\leq\lambda^2|x_2-x_1|$. Observe que agora se pode escrever

$$|x_4-x_3|\leq\lambda^2|x_2-x_1|. \tag{16}$$

Em geral têm-se

$$|x_n-x_{n-1}|\leq\lambda^{n-1}|x_2-x_1|. \tag{17}$$

Agora observa-se que $|x_{n+p+1}-x_n| = |x_{n+p+1}-x_{n+p}+x_{n+p}-x_n|$, donde

$$|x_{n+p+1}-x_n|\leq|x_{n+p+1}-x_{n+p}|+|x_{n+p}-x_n|. \tag{18}$$

por (17) se sabe que $|x_{n+p+1}-x_{n+p}|\leq\lambda^{n+p-1}|x_2-x_1|$ logo têm-se

$$|x_{n+p+1}-x_n|\leq\lambda^{n+p-1}|x_2-x_1|+|x_{n+p}-x_n|. \tag{19}$$

Observe que pode-se escrever $|x_{n+p}-x_n| = |x_{n+p}-x_{n+p-1}+x_{n+p-1}+\cdots+x_2-x_1|$ donde

$$\begin{aligned}|x_{n+p}-x_n| &\leq |x_{n+p}-x_{n+p-1}|+\cdots+|x_2-x_1| \\ &\leq (\lambda^{n+p-2}+\lambda^{n+p-3}+\cdots+\lambda^{n-1})|x_2-x_1|.\end{aligned} \tag{20}$$

Usamos (19) com (20) para formar $|x_{n+p+1}-x_n|\leq(\lambda^{n+p-1}+\lambda^{n+p-2}+\cdots+\lambda^{n-1})|x_2-x_1|$. Agora esta última desigualdade pode ser escrita da seguinte forma:

$$|x_{n+p+1}-x_n|\leq\lambda^{n-1}(\lambda^p+\lambda^{p-1}+\cdots+1)|x_2-x_1| \tag{21}$$

observe que a expressão entre parênteses é uma soma geométrica e pode-se reescrever (21) assim:

$$|x_{n+p+1}-x_n|\leq\lambda^{n-1}.\frac{1-\lambda^{p+1}}{1-\lambda}|x_2-x_1| \tag{22}$$

do fato de que $\lambda\in[0,1)$ têm-se $\lambda^{n-1}.\frac{1-\lambda^{p+1}}{1-\lambda}|x_2-x_1|\leq\frac{\lambda^{n-1}}{1-\lambda}|x_2-x_1|$ pelas propriedades usuais de séries geométricas com razão $\lambda<|1|$. Logo

$$|x_{n+p+1}-x_n|\leq\frac{\lambda^{n-1}}{1-\lambda}|x_2-x_1| \tag{23}$$

agora observa-se que quando $n\to\infty$ têm-se $\frac{\lambda^{n-1}}{1-\lambda}|x_2-x_1|\to0$. Isso permite que, dado $\varepsilon>0$, existe $n(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ tal que

$$|x_{n+p+1}-x_n|<\varepsilon \tag{24}$$

escrevendo $m=n+p+1$ se tem $|x_m-x_n|<\varepsilon$ para todo $m,n>n(\varepsilon)$. Logo pela definição de sequência de Cauchy (4.4), a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy. □

Teorema 5.2 *(método das aproximações sucessivas, caso $\langle M,d\rangle$)*
Dado um espaço métrico $\langle M,d\rangle$ e uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\langle M,d\rangle$ com a propriedade:

$$d(x_{n+1},x_n) \leq \lambda d(x_n,x_{n-1}) \tag{25}$$

para todo $n\in\mathbb{N}$, com $\lambda\in[0,1)$. Nessas condições, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy e portanto convergente.

Demonstração: O raciocínio e a ordem dos argumentos seguem-se na mesma linha do que foi realizado anteriormente no caso $\mathbb{R}$. Do fato de que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tem a propriedade (25), mais geralmente se tem

$$d(x_n,x_{n-1}) \leq \lambda^{n-1} d(x_2,x_1). \tag{26}$$

$$d(x_{n+p+1},x_n) \leq (\lambda^{n+p-1}+\lambda^{n+p-2}+\cdots+\lambda^{n-1})d(x_2,x_1) \tag{27}$$

$$d(x_{n+p+1},x_n) \leq \lambda^{n-1}(\lambda^p+\lambda^{p-1}+\cdots+1)d(x_2,x_1) \tag{28}$$

$$d(x_{n+p+1},x_n) \leq \lambda^{n-1}.\frac{1-\lambda^{p+1}}{1-\lambda}d(x_2,x_1) \tag{29}$$

$$d(x_{n+p+1},x_n) \leq \frac{\lambda^{n-1}}{1-\lambda}d(x_2,x_1). \tag{30}$$

A desigualdade (30) segue-se de (29) porque $\lambda\in[0,1)$; agora observa-se que quando $n\to\infty$ se tem $\frac{\lambda^{n-1}}{1-\lambda}d(x_2,x_1)\to 0$. Isso permite que, quando dado $\varepsilon>0$, existe $n(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ tal que

$$d(x_{n+p+1},x_n) < \varepsilon \tag{31}$$

escrevendo $m=n+p+1$ se tem $d(x_m,x_n)<\varepsilon$ para todo $m,n>n(\varepsilon)$. Logo pela definição de sequência de Cauchy (4.4), a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy. $\square$

Definição 5.1 *(contração)*
Dado $X\subset\mathbb{R}$ e uma função $f\colon X\longrightarrow X$, diz-se que f é uma *Contração* quando existe $\lambda\in[0,1)$ tal que

$$|f(x)-f(y)| < \lambda|x-y| \tag{32}$$

para quaisquer $x,y\in X$.
Dado um espaço métrico $\langle M,d\rangle$, $X\subset\mathbb{R}$ e uma função $f\colon X\longrightarrow X$, diz-se que f é uma *Contração* quando existe $\lambda\in[0,1)$ tal que

$$d(f(x),f(y)) < \lambda d(x,y) \tag{33}$$

para quaisquer $x,y\in X$.

Definição 5.2 *(ponto fixo de uma função)*
Dado uma função $f\colon A\longrightarrow A$ e $a\in A$, diz-se que a é um *Ponto Fixo de f* quando

$$f(a)=a. \tag{34}$$

Teorema 5.3 *(do ponto fixo na reta)*
Dado $X\subset\mathbb{R}$, uma contração $f\colon X\longrightarrow X$ e um elemento $x_0\in X$ escolhido arbitrariamente; a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}$ definida por

$$x_1 := f(x_0) \text{ e } x_{n+1} := f(x_n) \tag{35}$$

(i) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência convergente;

(ii) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para um ponto fixo de f;

(iii) f possui um único ponto fixo.

Demonstração:Para provar (i), tome $x_0 \in X$ e defina $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}$ de acordo com (35). Pela definição de f e do fato de que ela é uma contração, pode-se escrever

$$|f(x_1) - f(x_0)| = |x_2 - x_1| \leq \lambda |x_1 - x_0| \tag{36}$$

e mais geralmente

$$|f(x_n) - f(x_{n-1})| = |x_{n+1} - x_n| \leq \lambda |x_n - x_{n-1}| \tag{37}$$

logo, esta é uma sequência do tipo especificada pelo teorema (5.1) do método das aproximações sucessivas, e portanto, converge. Isto prova (i).

Para demonstrar (ii), por f ser uma contração, mostra-se que ela é contínua. De fato, dado $\varepsilon > 0$ basta tomar $\delta = \frac{1}{\lambda}\varepsilon$, têm-se para $x, y \in X$ com $|x-y| < \delta$

$$|f(x) - f(y)| \leq \lambda |x-y| < \lambda \cdot \frac{1}{\lambda}\varepsilon = \varepsilon. \tag{38}$$

Sabemos por (i) que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência convergente; seja $a = \lim_{n\to\infty} x_n$, logo, pela continuidade de f e pela definição de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tem-se

$$f(a) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = a. \tag{39}$$

Isto mostra que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para um ponto fixo de f.

Para mostrar (iii), seja $b \in X$ com $f(b) = b$, por f ser uma contração têm-se

$$|f(a) - f(a)| = |a-b| \leq \lambda |a-b| \tag{40}$$

onde $f(a) = a$, logo $(1-\lambda)|a-b| \leq 0$. Do fato de que $\lambda \in [0,1)$ têm-se $1-\lambda > 0$ e como $|a-b| \geq 0$, segue-se que $|a-b| = 0$ e têm-se $(1-\lambda)|a-b| = 0$; logo, $a = b$ e o ponto fixo de f é único. $\square$

Algo que foi utilizado implicitamente na demonstração é que o conjunto $\mathbb{R}$ forma um corpo ordenado completo, pois caso $\mathbb{R}$ não fosse completo poderia existir sequências de Cauchy não convergentes.

Teorema 5.4 *(do ponto fixo num espaço métrico)*

Dado um espaços métrico completo $\langle M, d\rangle$, $X \subset \mathbb{R}$, uma contração $f\colon X \longrightarrow X$ e um elemento $x_0 \in X$ escolhido arbitrariamente; a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}$ definida por

$$x_1 := f(x_0) \text{ e } x_{n+1} := f(x_n) \tag{41}$$

(i) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência convergente;

(ii) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para um ponto fixo de f;

(iii) f possui um único ponto fixo.

Demonstração:Para provar (i), tome $x_0 \in X$ e defina $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em M de acordo com (41). Pela definição de f e do fato de que ela é uma contração, pode-se escrever

$$d(f(x_1), f(x_0)) = d(x_2, x_1) \leq \lambda d(x_1, x_0) \tag{42}$$

e mais geralmente

$$d(f(x_n), f(x_{n-1})) = d(x_{n+1}, x_n) \leq \lambda d(x_n, x_{n-1d}) \tag{43}$$

logo, esta é uma sequência do tipo especificada pelo teorema (5.2) do método das aproximações sucessivas, e portanto, converge. Isto prova (i).

Para demonstrar (ii), por f ser uma contração, mostra-se que ela é contínua. De fato, dado $\varepsilon > 0$ basta tomar $\delta = \frac{1}{\lambda}\varepsilon$, têm-se para $x, y \in X$ com $d(x,y) < \delta$

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x,y) < \lambda \cdot \frac{1}{\lambda}\varepsilon = \varepsilon. \tag{44}$$

Sabemos por (i) que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência convergente; seja $a = \lim_{n\to\infty} x_n$, logo, pela continuidade de f e pela definição de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tem-se

$$f(a) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = a. \tag{45}$$

Isto mostra que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para um ponto fixo de f.

Para mostrar (iii), seja $b \in X$ com $f(b) = b$, por f ser uma contração têm-se

$$d(f(a), f(a)) = d(a,b) \leq \lambda d(a,b) \tag{46}$$

onde $f(a) = a$, logo $(1-\lambda)d(a,b) \leq 0$. Do fato de que $\lambda \in [0,1)$ têm-se $1-\lambda > 0$ e como $d(a,b) \geq 0$, segue-se que $d(a,b) = 0$ e têm-se $(1-\lambda)d(a,b) = 0$; logo, $a = b$ e o ponto fixo de f é único. □

Fato análogo ao discutido no final da demonstração desse teorema na sua versão para a reta é que algo que foi utilizado implicitamente na demonstração é que o conjunto M forma um espaço métrico completo, pois caso M não fosse completo poderia existir sequências de Cauchy não convergentes.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS:

Ao se ter a oportunidade de ver conceitos matemáticos definidos em contextos mais gerais, permite que se observe e de a importância necessária a certos conceitos da teoria que por vezes, parecem de importância inferior. Observou-se que a demonstração do teorema do ponto fixo no caso mais geral em espaços métricos, seguiu-se que sem nenhum esforço adicional da demonstração do mesmo para o caso da reta real. Por meio da comparação entre algumas ferramentas que são estudadas durante um primeiro curso de análise real com sua respectivas generalizações em espaços métricos, pode-se ter uma melhor compreensão da utilidade e importância das noções teóricas que se estudam em análise, como por exemplo, da noção de completude. Com esta discussão pode se ter uma visão mais clara da necessidade da formalização de vários conceitos considerados elementares, por exemplo, as propriedades dos números reais, para se obter provas completas de resultados importantes, muitos deles, introduzidos já nos primeiros cursos de Cálculo.

REFERÊNCIAS

BLOCH, E. D. **The Real Numbers and Real Analysis**. New York: Springer, 2011.

KÖRNER, T. W. **A Companion to Analysis, A Second First and First Second Curse in Analysis**. Volume 62, New York: American Mathematical Society, 2003.

FERREIRA, M. S. **O Teorema do Ponto Fixo de Banach e Aplicações**. 2008. Monografia (Bacharelado em Matemática) - Curso de Matemática, Universidade Estadual de Santa Cruz.

LIMA, E. L. **Análise Real Volume 1: Funções de Uma Variável Real**. 12ed, Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

LIMA, E. L. **Curso de Análise Vol. 1**. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

LIMA, E. L. **Espaços Métricos**. 4ed, Rio de Janeiro: IMPA, 2011.

SEARCOID, Ó. M. **Metric Spaces**. London: Springer-Verlag, 2007.