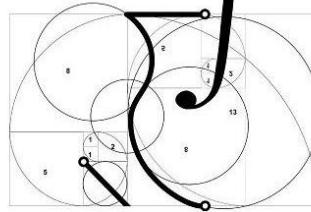


# XX EREMAT SUL

Encontro Regional  
de Estudantes de  
Matemática da Região Sul



## POLIEDROS DUAIS E A GEOMETRIA SENDO ENSINADA DE FORMA CONSTRUTIVA

**Ana Regina da Rocha Mohr** – ar.mohr@hotmail.com

Faculdades Integradas de Taquara, 95600-000 – Taquara, RS, Brasil

**Leila Leatrice Saldanha Pacheco** – leilaleatrice@bol.com.br

Faculdades Integradas de Taquara, 95600-000 – Taquara, RS, Brasil

**Resumo.** Quando falamos em Matemática, alguns alunos associam apenas cálculos ou algo de difícil interpretação, deixando de perceber sua real aplicabilidade. A Geometria, em especial os poliedros duais, traz a possibilidade de visualizar uma beleza inconfundível que ainda permanece escondida em seus cálculos. Dessa forma, a pesquisa procura meios para facilitar o ensino das propriedades geométricas tornando assim a construção desse conhecimento mais atrativo e motivador, objetivando-se em uma pesquisa científica de caráter qualitativo sobre os poliedros duais sendo ele um conteúdo de Geometria Espacial pouco explorado pelos professores. O estudo relata a estrutura dos poliedros duais e conceitos que podem ser trabalhados em sala de aula através da sua construção, visando a redução das dificuldades e desmotivações dos alunos quando o professor trabalha a Geometria. Os pesquisadores realizaram um estudo inicial construindo os sólidos platônicos e seus duais a partir de recursos diversificados com a finalidades de analisar se sua construção seria viável para ser aplicada com alunos. Obtemos como resultados que o estudo dos poliedros duais pode ser uma alternativa viável para a visualização dos esqueletos dos sólidos e suas propriedades geométricas, tornando a Geometria um estudo agradável. Desse modo, os educando poderão ter a possibilidade de perceber que na Matemática, tudo é construído progressivamente.

**Palavras Chave:** Geometria, Poliedros duais, Aprendizagem significativa, Educação Matemática.

### 1. INTRODUÇÃO

A Geometria é uma área da Matemática que é facilmente encontrada na natureza sendo utilizada de forma prática desde os primórdios da civilização. A Geometria espacial é de fácil aplicabilidade para nossos educandos, porém observa-se que seu estudo ainda é pouco explorado em sala de aula como conteúdo escolar. Este fato pode estar relacionado à falta de

material sobre o assunto, um currículo engessado ou até mesmo domínio do assunto por parte de alguns educadores.

Diante desta realidade, o trabalho é caracterizado por uma pesquisa científica de caráter qualitativo sobre os poliedros duais sendo ele um conteúdo de Geometria espacial pouco explorado pelos professores. O estudo relata a estrutura dos poliedros duais e conceitos que podem ser trabalhados em sala de aula através da sua construção, visando a redução das dificuldades e desmotivações dos alunos quando o professor trabalha a Geometria.

Segundo Freitas (2011), a Geometria quando explorada, pode tornar-se um recurso rico em oportunidades, os educandos tem a oportunidade de realizar construções, representações e discussões, assim, o conduzimos a investigar, descobrir, descrever, identificando propriedades. Portanto o professor não é dono do saber, mas apenas um mediador construindo oportunidades de reflexão e aprendizagem.

Para Becker (2001, p. 69) “Aprender é construir conhecimento, resultado das interações que o sujeito mantém com o meio”. Mediando a aprendizagem através do estabelecimento de relação com objetos que são do interesse dos educandos temos a oportunidade de demonstrar que a Matemática pode ser um conteúdo de fácil interpretação.

## 2. REFERENCIAL TEÓRICO

### 2.1 Aprendizagem significativa e o estudo da Geometria

Em educação muito se fala em aprendizagem significativa, que um bom ensino deve ser construtivista, que é necessário promover a mudança conceitual e primar por uma aprendizagem com significado. Porém ao analisar o ensino de Matemática, percebe-se que ainda não se verifica uma verdadeira mudança conceitual nesse sentido, contudo nota-se diferentes estratégias utilizadas que caminham em direção a ela.

A Geometria quando explorada, pode tornar-se um recurso rico em oportunidades, os educandos tem a oportunidade de realizar construções, representações e discussões, assim, o conduzimos a investigar, descobrir, descrever, identificando propriedades (FREITAS, 2011).

Para o autor isso significa levar aos alunos atividades que facilitem a construção e a visualização de figuras tornando a aula mais significativa.

O estudo da Geometria deve possibilitar aos alunos o desenvolvimento da sua capacidade de desenvolver problemas práticos do cotidiano, como, por exemplo, orientar-se no espaço, ler mapas, estimar e comparar distâncias percorridas, reconhecer propriedades de formas geométricas básicas, saber usar as diferentes unidades de medida. Também é um estudo em que os alunos podem ter oportunidade especial, com a certeza não a única, de apreciar a faceta da Matemática que trata de teoremas e argumentações dedutivas (BRASIL, 1997, p.75).

Os conteúdos de Geometria devem estar relacionados com o cotidiano e a realidade dos alunos e o professor deve fazer as pontes entre o fazer e o compreender. Pois “o conhecimento não nasce com o indivíduo nem é dado pelo meio social” (BECKER, 2001, p.71). O autor afirma que o conhecimento não é recebido e sim algo construído pelo sujeito através da interação com o seu meio, tanto físico como social.

A era do individualismo e aprendizado expositivo em sala de aula está ficando para trás, nossos alunos sentem falta de construir o seu próprio conhecimento, para que isso aconteça os professores necessitam estar qualificados, auxiliando nesta nova maneira do aluno buscar o seu conhecimento através de uma aprendizagem significativa.

Os alunos sentem necessidade de melhores metodologias de ensino, para desenvolverem um maior interesse e facilidade de interpretação dos problemas propostos pelo professor.

Segundo Moraes (2003, p. 105):

O construtivismo pretende ser uma das formas de superar a denominada racionalidade técnica subjacente à forma de conceder a atividade docente presente em muitas instâncias de formação e de educação continuada de professores. Constitui-se em uma das formas de pôr em prática a reflexão na ação e sobre a ação, tornando o professor sujeito ativo de sua prática.

Para Ausubel (1982), aprendizagem significativa é aquela em que ideias expressas simbolicamente interagem de maneira substantiva e não-arbitrária com aquilo que o aprendiz já sabe, substantiva quer dizer não-literal, não ao pé-da-letra, e não-arbitrária significa que a interação não é com qualquer ideia prévia, mas sim com algum conhecimento especificamente relevante já existente na estrutura cognitiva, ou seja o conhecimento prévio que o aluno traz para a sala de aula.

A aprendizagem significativa ocorre quando uma nova informação une-se a conceitos já existentes nas experiências adquiridas, seja esse conhecimento adquirido em sala de aula ou adquirido em seu dia a dia, sendo assim o fator que mais influencia na aprendizagem consiste no que o aluno já sabe.

É a partir desse ponto de apoio, que deve ocorrer a aprendizagem dos novos conceitos, como resume MOREIRA (2006, p. 38): “a aprendizagem significativa é o processo por meio do qual novas informações adquirem significado por interação (não associação) com aspectos relevantes preexistentes na estrutura cognitiva”. Devemos estar cientes de que esse processo de construção do conhecimento só se dá através da troca de experiências do discente com o docente.

No entanto, Santos (2008, p. 33) comenta que: “A aprendizagem somente ocorre se quatro condições básicas forem atendidas: a motivação, o interesse, a habilidade de compartilhar experiências e a habilidade de interagir com os diferentes contextos”.

Sendo assim, os educadores têm como desafio de despertar motivos para a aprendizagem, tornar as aulas interessantes para os alunos, trabalhando conteúdos que possam ser associados com seus conhecimentos prévios, transformando a sala de aula em um ambiente criativo que o estimule a fazer ligações do seu cotidiano com os conceitos dados pelos educadores.

Portanto construtivismo é uma teoria que nos permite interpretar o mundo em que vivemos, reunindo várias tendências do pensamento educacional, transformando a educação em um processo de construção do conhecimento.

## 2.2 Educação matemática

No Brasil, a Educação Matemática teve início a partir do Movimento da Matemática Moderna, mais precisamente no final dos anos 70 e início dos 80, nesse mesmo surge a Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) com os primeiros programas de pós-graduação em Educação Matemática.

Em estudos Kilpatrick (1998), explica que existem dois objetivos básicos nas pesquisas em Educação Matemática, o que visa melhorar a qualidade do ensino-aprendizagem dos conteúdos matemáticos, e o que busca desenvolver a Educação Matemática no campo da investigação para a construção do conhecimento.

Existem fatores que foram determinantes para o surgimento da Educação Matemática, como busca de aperfeiçoamento profissional e científico, sendo o primeiro à preocupação dos matemáticos e de professores de Matemática sobre a qualidade das ideias matemáticas, e

como elas seriam apresentadas as novas gerações, visando a busca pelas práticas em sala de aula (KILPATRICK, 1992).

A Educação Matemática como campo profissional e domínio acadêmico, constituiu-se a partir de duas áreas que se encontram nas práticas escolares: a Matemática e a Psicologia. Desde modo Kilpatrick (1998), explica que os profissionais da área da Matemática se preocupam com o ensino, enquanto os da Psicologia com a maneira que acontece a aprendizagem, resultando em preocupações como as ações relacionadas aos métodos e técnicas de ensino, com a formação de professores, a organização dos currículos escolares, práticas de avaliação e aproveitamento escolar.

Portanto o objetivo da Educação Matemática está relacionado com o ensino, aprendizagem, conhecimento matemático, conjunto de ideias, processos, atividades implicam na construção, representação, transmissão e valorização do conhecimento.

Em estudos Rico & Sierra (2000, p. 81) apontam três sentidos da Educação Matemática:

Educação Matemática como conjunto de conhecimento, artes, destrezas, linguagens, convenções, atitudes e valores centrados na Matemática e que são transmitidos por meio do sistema escolar; Educação Matemática como atividade social que é praticada em determinadas instituições e levada a cabo por profissionais qualificados; e Educação Matemática como disciplina científica (Didática da Matemática em alguns países) com o objetivo de delimitar e estudar os problemas que surgem durante os processos de organização, comunicação, transmissão, construção e valorização do conhecimento matemático.

Educação Matemática como prática e área de investigação que surge da necessidade de produzir resultados práticos que ajudem a melhorar o ensino. Ela surge também como um conjunto de práticas sociais, como a investigação científica.

No entanto Garnica, ressalta que não devemos usar a Educação Matemática unicamente como prática científica mas que:

[...] assumir Educação Matemática como “movimento” implica aceitar que, desde o primeiro instante em que se decidiu ensinar a alguém alguma coisa chamada “Matemática”, uma ação de Educação Matemática começou a se manifestar. [...] Assumir a Educação Matemática como “movimento” implica não em desqualificar sua vertente prática e, até mesmo, radicalizando, sua vertente “meramente” prática. Pretende-se, porém, uma prática que demande necessariamente, reflexão. Não a mera reflexão teórica fundante supostamente “autossuficiente”, mas uma reflexão que, sugerida pela prática, visa a uma efetiva intervenção na ação pedagógica (1999, p.60-61).

A Educação Matemática é mais complexa do que aparenta ser, ela está ligada a várias partes do saber, ela tem uma riqueza de metodologias, que implicam na interdisciplinaridade, buscando a relação da prática e a teoria.

## 2.3 Sólidos platônicos e a construção dos seus duais

Nos últimos anos, a nossa prática pedagógica e as pesquisas realizadas, têm mostrado que a Geometria tornou-se uma disciplina teórica, bastante algebrizada, de modo que as formas geométricas e suas propriedades são substituídas por complicados cálculos algébricos, sobre este olhar a pesquisa demonstrará uma alternativa metodológica diversificada para o estudo dos poliedros duais.

Em pesquisas recentes, Batista e Barcelos (2014) caracterizam um poliedro dual ao poliedro que se obtém unindo por segmentos de reta os centros das faces consecutivas do primeiro, ou seja: 1º) marca-se o centro de cada face do poliedro original. 2º) liga-se, por segmento de reta, cada um destes centros aos centros das faces adjacentes. 3º) desconsidera-se o poliedro original.

Completa Kaleff (2003, p. 111):

[...] dois poliedros são chamados de duais quando um está dentro do outro, de tal forma que os vértices do poliedro que está no interior tocam as faces do poliedro exterior somente no ponto central de cada face. E para se obter o ponto central de uma face é necessário que se determine o ponto de encontro das bissetrizes dos ângulos da face do poliedro.

Batista, Barcelos (2014), explicam de forma clara a definição dos poliedros duais facilitando a compreensão do seu estudo e a partir destes conceitos temos a possibilidade de desenvolver o pensamento geométrico de nossos educando, através da realização de construções dos sólidos platônicos e seus duais.

O estudo baseou-se no aplicativo Poliedros de Platão e seus duais<sup>1</sup> da Universidade Federal Fluminense-UFF para auxiliar nas construções, bem como em sua visualização. Em atividades recentes Kaleff, em seu aplicativo Poliedros de Platão e seus Duais, explica através do aplicativo que para construir o cubo e o seu poliedro dual, o octaedro. Basta construir os esqueletos do cubo e do octaedro. Considerando (a) a medida da aresta a ser utilizado como aresta do cubo e (x) a medida da aresta do octaedro dual.

Observe na fig. 1:

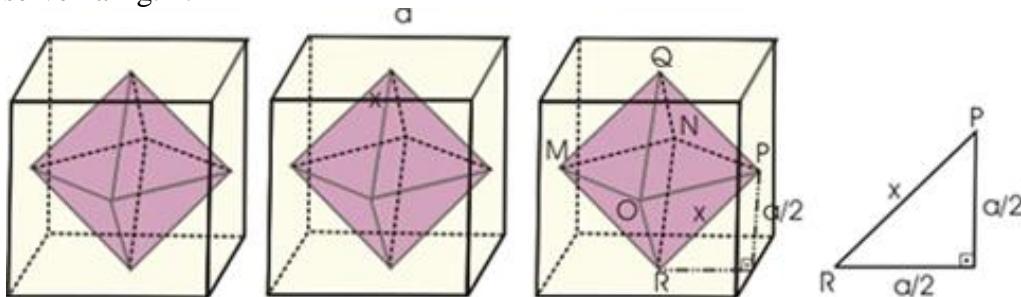


Figura 1- Cubo e seu dual que é o octaedro

A fig. 1 apresenta por meio de simples demonstrações como podemos descobrir o valor da aresta do dual do cubo, observe o cálculo a ser realizado:

$$x^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad (1)$$

$$x = \frac{a\sqrt{2}}{2} \quad (2)$$

Portanto, a equação demonstra através do teorema de Pitágoras, o valor da aresta do octaedro a ser construído, para que o mesmo possa ser o dual do cubo.

<sup>1</sup> Objeto de aprendizagem que disponibiliza atividades a serem construídas e visualizadas sobre os sólidos platônicos e seus duais e está disponível para ser usado *online* ou para *download* em [http://www.uff.br/cdme/poliedros\\_platao\\_dual](http://www.uff.br/cdme/poliedros_platao_dual).

Kaleff em seu aplicativo explica ainda, que para realizar o inverso basta observa a fig. 2 e realizar outro cálculo para descobrir o valor da aresta do cubo.

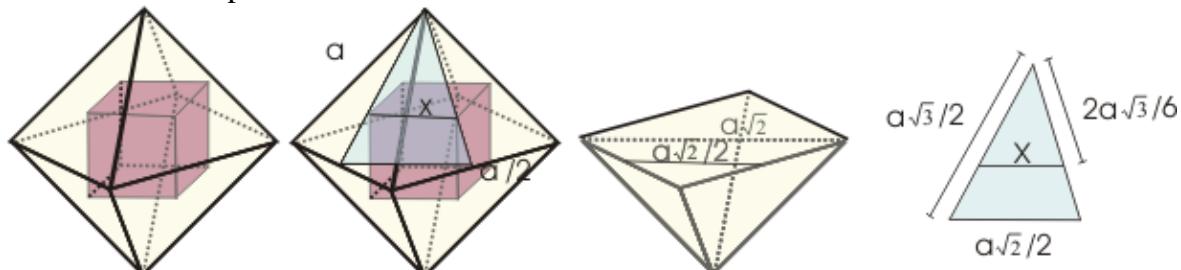


Figura 2- Octaedro e seu dual o cubo

Portanto deverá ser realizado o seguinte cálculo:

$$x = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \quad (3)$$

$$x = \frac{a\sqrt{2}}{3} \quad (4)$$

A equação acima refere-se na medida do lado do cubo que será o dual do octaedro, ou seja, é necessário utilizar a medida encontrada para construir a aresta do novo poliedro a ser formado.

Kaleff complementa que para construir o modelo de esqueleto do tetraedro regular e do seu dual. Para isso é necessário você construir os esqueletos de dois tetraedros regulares, de tamanhos diferentes. Onde considera-se, ( $L$ ) a medida aresta do tetraedro regular original e ( $l$ ) a medida da aresta do tetraedro regular dual. Sendo que:  $L = 3l$ .

A autora complementa a explicação utilizando a demonstração da fig. 3:

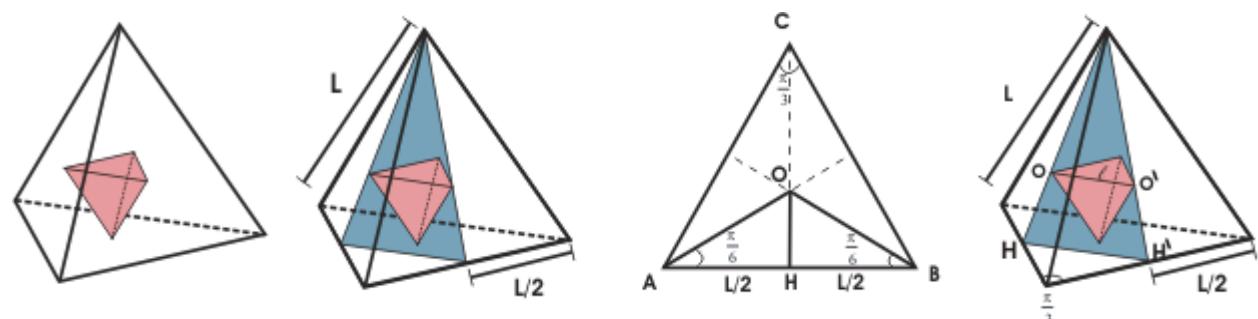


Figura 3: Tetraedro e o seu dual

Através das demonstrações feitas por Kaleff na ferramenta de aprendizagem Poliedros platônicos e seus duais, temos a possibilidade de construir e visualizar os sólidos platônicos e seus duais, oportunizando a construção dos poliedros a partir de materiais diversificados, buscando assim uma aprendizagem significativa através da Educação Matemática.

### 3 PROCEDIMENTOS DA PESQUISA

A pesquisa constitui-se em um estudo sobre os sólidos platônicos e seus duais, para analisar a possibilidade de trabalhar esse conteúdo em sala de aula através de uma aprendizagem significativa, onde os alunos terão a possibilidade de construírem o seu próprio conhecimento.

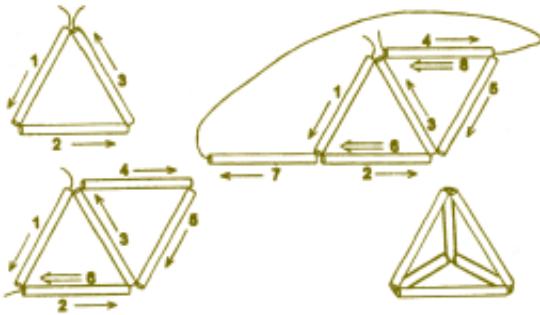
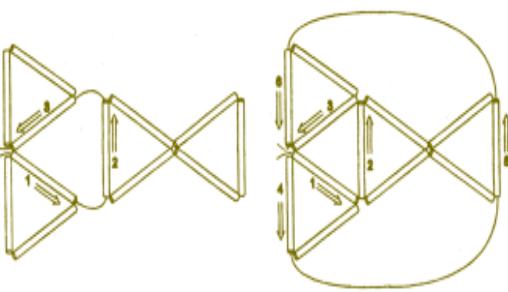
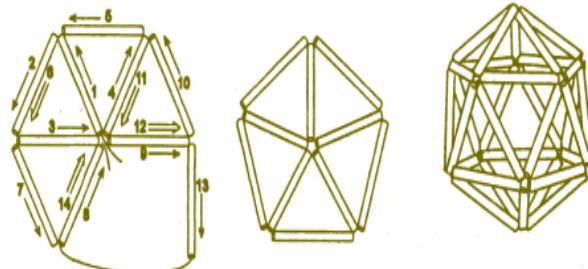
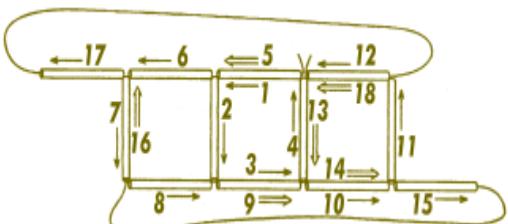
	
Esquema do tetraedro	Esquema do octaedro
	
Esquema do icosaedro	Esquema do hexaedro

Tabela 1: Demonstração dos esqueletos de tetraedro, octaedro, icosaedro e hexaedro

Portanto durante a pesquisa foram realizados estudos e posteriormente a construção de alguns sólidos platônicos e seus duais utilizando materiais diversificados, as construções foram realizadas pelos pesquisadores conforme os passos sugeridos pela autora Kaleff em seu aplicativo.

A autora demonstra a construção dos sólidos platônicos utilizando canudos e linhas e para as medidas dos duais, a autora demonstra por meio das fórmulas que foram trabalhadas no referencial. Veja a tabela abaixo que demonstra o esqueleto das construções dos sólidos.

Por meio dos esquemas da tabela 1, citados por Kaleff em seu aplicativo e as demonstrações das medidas das arestas conforme fig.1, fig.2 e fig.3 citadas no referencial, as pesquisadores tiveram a oportunidade de realizar as construções mostradas na tabela 2.

Portanto, através de cálculos simples e materiais diversificados as pesquisadoras construíram o tetraedro e seu dual, o cubo e o seu dual e o octaedro e o seu dual, também foram construídos um poliedros dentro do outro referenciando seus pontos em comum.

Sólidos regulares sobrepostos	Tetraedro e seu dual	Octaedro e seu dual
Tetraedro e seu dual	Octaedro e seu dual	Cubo e seu dual

Tabela 2: Sólidos regulares e seus duais utilizando materiais diversificados

### 3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante de estudos percebe-se que o ensino da Matemática, em especial o da Geometria, tem alto índice de rejeição tanto por parte do professor quanto do aluno, pois muitas vezes por ser trabalhada de forma mecânica, exigindo um grande empenho do professor para tentar demonstrar a ligação dos conceitos com o cotidiano.

Para que o conhecimento do educando seja construído de forma satisfatória o professor precisa estar capacitado conseguindo ser o mediador de informações, tendo a função de estimular situações que promovam a atualização e a expansão das potencialidades intelectuais do aluno, desenvolvendo o espírito crítico e a capacidade de construção do conhecimento.

Portanto a aprendizagem precisa acontecer no aluno e não para o aluno, pois quando ele interage, participa e traz consigo tudo o que vê, vive e ouve, está construindo o seu conhecimento.

Sendo assim, fica evidente a grande importância da utilização de materiais concretos na Educação Matemática, pois tal recurso é uma possibilidade de proporcionar ao aluno uma aprendizagem significativa por constituir-se como um material potencialmente significativo, de acordo com a definição de Moreira (1999).

Obtemos como resultados que o estudo dos poliedros duais pode ser uma alternativa viável para a visualização dos esqueletos dos sólidos e suas propriedades geométricas, tornando a Geometria um estudo agradável. Desse modo, os educando poderão ter a possibilidade de perceber que na Matemática, tudo é construído progressivamente.

Para desenvolver uma aula é extremamente necessário um professor qualificado, pois o sucesso do trabalho está na confiança, no conhecimento do educador sobre o potencial dos recursos educativos.

Diante destes estudos, temos a oportunidades de levantar questionamentos incentivando os educandos a buscarem através da pesquisa o gosto pela Matemática, em especial a Geometria.

## Agradecimentos

Nosso agradecimento é ao coordenador do Curso de Matemática das Faculdades Integradas de Taquara-Faccat, que também é nosso professor orientador do programa de iniciação à docência Pibid/Faccat, Prof. Dr. Zenar Pedro Schein, por sempre nos motivar a pesquisar, tentando tornar o ensino da Matemática mais significante para nossos aprendentes.

Um agradecimento em especial à supervisora do programa de iniciação à docência Pibid/Faccat/Theophilo Sauer, Prof. Ailê Pressi, que nos apoiou nas pesquisas dando um suporte para enfrentar os desafios que ocorreram ao longo do estudo.

Ao diretor-geral das Faculdades Integradas de Taquara Prof. Delmar Backes e a coordenadora geral do Pibid/Faccat Profª. Marlene Soder Ressler, que sempre nos apoiam em nossas pesquisas.

## REFERÊNCIAS

- AUSUBEL, D. P. **A aprendizagem significativa: a teoria de David Ausubel.** São Paulo: Moraes, 1982.
- BATISTA, S. BARCELOS, G. **Projeto “TIC no processo de Ensino e Aprendizagem de Matemática”.** Acesso em 05 de maio de 2014. Online. Disponível em: [http://www.es.iff.edu.br/poliedros/poli\\_duais.html](http://www.es.iff.edu.br/poliedros/poli_duais.html).
- BECKER, F. **Educação e construção do conhecimento.** Porto Alegre: Artmed, 2001.
- FREITAS, G. S. **Didática do ensino Geométrico.** 2011. Acesso em 02 ago. 2014. Disponível em: <http://www.infoescola.com/pedagogia/didatica-do-ensino-geometrico>.
- GARNICA, A. V. M. Filosofia da Educação Matemática: algumas ressignificações e uma proposta de pesquisa. In: BICUDO, M. A. V. (org.) **Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas.** São Paulo: Editora UNESP, 1999, (Seminários & Debates) p. 59 -74.
- KALEFF, A. M. M. R. **Poliedros de Platão e seus duais.** Acesso em 10 de ago. de 2014. Online. Disponível em: [http://www.uff.br/cdme/poliedros\\_platao\\_dual/aluno05.html](http://www.uff.br/cdme/poliedros_platao_dual/aluno05.html).
- KALEFF. REI, D. M. **Vendo e entendendo poliedros:** do desenho ao cálculo do através de quebra-cabeças e outros materiais concretos. Ed. UFF, 1998.
- KILPATRICK, J. História de la investigación en Educación Matemática. In KILPATRICK, J. & otros. **Educación Matemática y investigación.** Madrid: Editorial Sonteses, 1992.
- KILPATRICK, J. Investigación em Educación Matemática: Su historia y algunos temas de actualidad. In GÓMEZ, P. KILPATRICK, J & RICO L. **Errores y dificultades de los estudiantes.** Bogotá: Guniversidade de los Andes, 1998.
- MOREIRA, M. A. **Teorias de aprendizagem.** São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária, 1999.

\_\_\_\_\_. **A teoria da aprendizagem significativa e sua implementação em sala de aula.** Brasília: Editora Universidade de Brasília, 2006.

SANTOS, J. C. F. dos. **Aprendizagem Significativa:** modalidades de aprendizagem e o papel do professor. Porto Alegre: Mediação, 2008.

RICO L.; SIERRA, M. Didáctica de la Matemática e investigación. In CARRILLO J. & CONTREAS, L. C. **Matemática española en los albores del siglo XXI.** Hergué: Ed. Andaluza, Huelva, 2000.