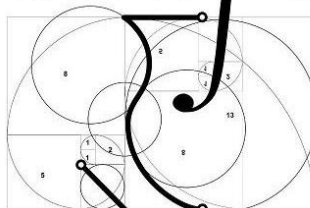


# XX EREMAT SUL

Encontro Regional  
de Estudantes de  
Matemática da Região Sul



## OBTENÇÃO DA LEI EFETIVA PARA O FLUXO DE CALOR EM UMA BARRA BIFÁSICA, PERIÓDICA, NÃO LINEAR E COM BARREIRA TÉRMICA ENTRE AS FASES, ATRAVÉS DO MÉTODO DE HOMOGENEIZAÇÃO ASSINTÓTICA

**Roberto Martins da Silva Décio Júnior** – roberto.decio.jr@gmail.com

Universidade Federal de Pelotas, Campus Porto, 96010-610 – Pelotas, RS, Brasil

**Leslie Darien Pérez Fernández** – leslie.fernandez@ufpel.edu.br

Universidade Federal de Pelotas, Campus Capão do Leão, 96010-971 – Capão do Leão, RS, Brasil

**Julián Bravo Castillero** – jbravo@matcom.uh.cu

Universidade de Havana, Faculdade de Matemática e Computação, San Lazaro y Vedado, 1040. Havana, Cuba.

**Resumo.** O presente trabalho apresenta a aplicação do Método de Homogeneização Assintótica na obtenção de uma lei efetiva para o fluxo de calor de uma barra bifásica, periódica, não linear e com uma barreira térmica entre as fases. A lei obtida foi avaliada em situações de condução até isolamento perfeitos, analisando seu comportamento em relação a diferentes parâmetros, onde constatou-se a sua validade de acordo com a coerência apresentada nos resultados obtidos

**Palavras Chave:** Materiais Compósitos, Contato imperfeito, Comportamento Não linear, Método de Homogeneização Assintótica

### 1. INTRODUÇÃO

O comportamento de um material frente a alguma interferência do ambiente (seja aplicação de tensão, transferência de calor, entre outras) depende diretamente das propriedades físicas e químicas que apresenta. É importante lembrar que o desempenho em serviço é determinado não apenas pelo material escolhido, mas também pelas modificações advindas do processamento (FERRANTE, 2009). O estudo das propriedades térmicas de um dado material se faz necessário devido à forte influência destas no seu comportamento.

A vibração térmica dos átomos do material é a principal causa do aparecimento de anormalidades na estrutura cristalina do sólido. Especificamente, a concentração de tais defeitos cresce exponencialmente com a temperatura (SHACKELFORD, 2009), e como os movimentos de átomos no sólido ocorrem através do deslocamento destes pontos defeituosos, a taxa de difusão do estado sólido também cresce exponencialmente com a temperatura.

A variação de temperatura no material também é responsável pela variação do volume do mesmo. Porém, esta dilatação (ou contração) ocorre de forma diferente no interior do sólido e

nas porções periféricas, e deste comportamento resultam tensões residuais que, dependendo do gradiente de temperatura e do material, podem levar à sua fratura.

Entre as principais variáveis consideradas no estudo das propriedades térmicas de um sólido estão: temperatura (e seu gradiente ao longo do material); condutividade térmica e fluxo do calor. Matematicamente, a condutividade térmica é a razão entre o fluxo de calor e o gradiente de temperatura, numa mesma direção.

Materiais compósitos são materiais heterogêneos formados a partir da distribuição de domínios ocupados por dois ou mais materiais homogêneos constituintes diferentes chamados de fases, tais que a escala da distribuição (escala microscópica) seja, simultaneamente, muito maior que a escala molecular, e muito menor que a escala do compósito (escala macroscópica). Isto permite que o compósito seja considerado como um meio contínuo e lhe associar propriedades macroscópicas ou efetivas.

O objetivo da produção de um compósito é obter, num único material, novas e/ou melhores propriedades físicas, as quais não seriam obtidas com os materiais constituintes separados. Basicamente, estes materiais se constituem na inclusão de um material numa matriz, a fim de reforçá-la, sendo conhecidos como compósitos do tipo matriz-inclusão. Um dos principais exemplos deste tipo de material é a fibra de vidro, onde a força de fibras de vidro de diâmetro pequeno é combinada com a ductilidade de uma matriz polimérica. No contexto térmico, por exemplo, tem-se o problema da degradação das propriedades de um polímero quando submetido a temperaturas próximas às consideradas críticas. Neste caso, o reforço com fibras não impede a degradação, mas o aumento da resistência mecânica obtido com a combinação faz com que tal degradação ocorra sob temperaturas mais elevadas. Assim, inúmeros avanços científicos e tecnológicos recentes em diversas áreas como aeronáutica, aeroespacial, petroquímica, naval, bioengenharia, automobilística, construção civil e de artigos esportivos, entre outras, somente se tornaram viáveis após o advento dos materiais compósitos (LEVY NETO & PARDINI, 2006).

Matematicamente, o comportamento físico do compósito é modelado mediante um problema de valores de contorno e iniciais no qual as equações diferenciais apresentam coeficientes rapidamente oscilantes. Tais oscilações rápidas são causadas pelo caráter microscópico da distribuição dos constituintes e fazem com que a resolução numérica direta, quando possível, tenha um alto custo computacional. Por exemplo, a aplicação dum método de malha como o método de elementos finitos requer que a malha seja extremamente fina.

Uma alternativa para encontrar o comportamento efetivo do compósito consiste em empregar algum procedimento de homogeneização, a qual consiste em estudar um material homogêneo equivalente ao compósito, no sentido de que as propriedades efetivas deste são as propriedades daquele, numa microescala estabelecida, e depois passar as informações obtidas para a macroescala do material. Em particular, neste trabalho empregaremos o método de homogeneização assintótica (MHA), o qual se baseia no desenvolvimento assintótico em escala dupla da solução do problema de valores de contorno e iniciais que modela o comportamento físico do compósito. Esta solução assintótica considerada apresenta uma exatidão muito boa, sendo demonstrado matematicamente em (LAZZARI *et al.*, 2014) que tal aproximação é da ordem do parâmetro pequeno estabelecido para a microescala, no caso da equação unidimensional do calor. Assim, obtém-se uma sequência recorrente de problemas cujo limite é o modelo do material homogêneo equivalente, ou seja, um problema de valores de contorno e iniciais com coeficientes constantes. Este método é relevante sobretudo quando o compósito apresenta microestrutura periódica, e permite estudar diversos fenômenos tais como vibrações elásticas, fluxo de calor, difusão, percolação de fluidos, oscilações eletromagnéticas e radiação, entre outros. Além disso, quando o uso de métodos numéricos

para a resolução dos problemas na sequência recorrente é inevitável, sua aplicação se caracteriza pelo baixo custo computacional (BAKHVALOV & PANASENKO, 1989).

O MHA tem sido aplicado com sucesso em diversos problemas físicos lineares, porém, comportamentos não lineares têm sido pouco estudados, assim como materiais que apresentam contato imperfeito entre suas fases. Em compósitos, as propriedades e a fração volumétrica de cada fase são importantes, também a extensão da conectividade entre as fases deve ser conhecida (ASKELAND & PHULÉ, 2008).

Em particular, o estudo das propriedades mecânicas efetivas do compósito está relacionado, por exemplo, à prevenção de falhas estruturais, como o dano e a fratura, os quais podem resultar em efeitos adversos levando a perdas econômicas ou de vidas (COURTNEY, 2005). Existem vários mecanismos de fratura de um corpo sólido, mas, de forma geral, ocorrem devido à quebra de ligações químicas na sua estrutura atômica e dependem de condições como temperatura e tensão, assim as condições do ambiente em que está inserido o material. Dessa forma, estudar o comportamento material efetivo perante a variação destas grandezas se faz extremamente necessário para a prevenção de falhas.

Assim, este trabalho tem por objetivo determinar e avaliar, via algoritmo baseado no MHA, a lei efetiva que modela o fluxo de calor numa barra bifásica com estrutura periódica, não linear, considerando a existência duma barreira térmica entre as fases constituintes.

## 2. METODOLOGIA

### 2.1. Formulação do problema

Seja uma barra bifásica infinita obtida da replicação periódica da célula básica  $\Omega^\alpha = \Omega_1^\alpha \cup \Omega_2^\alpha \cup \{x_i\}$ ,  $\Omega_1^\alpha \cap \Omega_2^\alpha = \emptyset$ , de comprimento  $|\Omega^\alpha| = \alpha \ll 1$ , onde  $\Omega_r^\alpha$  é a região ocupada pela fase constituinte  $r=1,2$  (o material de tipo  $r$ ) e  $x_i = \partial\Omega_1^\alpha \cap \partial\Omega_2^\alpha$  é o ponto de contato das fases. Assim,  $\{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  é o conjunto enumerável de pontos de contato entre as fases da barra na variável espacial macroscópica  $x$ .

Sejam  $\tau^\alpha$  e  $u^\alpha$  as variáveis do fluxo de calor e da temperatura, respectivamente, assumidas continuamente diferenciáveis para  $x \neq x_i$ . Assim, a lei que descreve o comportamento constitutivo da barra é dada por:

$$\tau^\alpha(u_x^\alpha, x) = 1_1^\alpha(x) \tau_1(u_x^\alpha) + 1_2^\alpha(x) \tau_2(u_x^\alpha) \quad (1)$$

onde,  $A^\alpha(x) = A(x/\alpha)$ , o índice  $x$  indica diferenciação, e  $\tau_r(u_x^\alpha)$  e  $1_r^\alpha(x)$  são a relação constitutiva e a função característica da fase  $r$ , respectivamente. Supõe-se que a barra está em equilíbrio, ou seja,

$$\left[ \tau^\alpha(u_x^\alpha, x) \right]_x = f(x), \text{ com } x \neq x_i, \quad (2)$$

onde  $f(x)$  é uma fonte de calor atuando na barra. Supõe-se também que, nas interfaces  $x = x_i$ , o fluxo de calor é contínuo, ou seja,

$$\left[ \tau^\alpha(u_x^\alpha, x) \right]_{x=x_i} = 0, \quad (3)$$

e que a temperatura tem descontinuidades de salto finito de magnitude proporcional ao fluxo na fase 1, ou seja,

$$\tau_1^\alpha(u_x^\alpha)\Big|_{x=x_i} = \beta u^\alpha_{x=x_i}, \quad (4)$$

onde o colchete duplo denota o operador do "salto" ou "contraste" da grandeza ao passar de uma fase à outra através de  $x = x_i$ , e  $\beta > 0$  é a condutância térmica da interface. A condição da Eq. (4) é chamada de barreira térmica. Note que,  $\beta = 0$  e  $\beta \rightarrow \infty$  correspondem, respectivamente, aos casos de isolamento térmico perfeito entre as fases da barra e de condução perfeita da temperatura nas interfaces.

## 2.2. Homogeneização assintótica

Introduz-se uma escala microscópica mediante a variável local  $\xi$  definida pela relação  $\xi = x/\alpha$ . Assim, em  $\xi$ ,  $\Omega_1 = (0, c_1)$ ,  $\Omega_2 = (c_1, 1)$ , e  $\xi = c_1$  é o ponto de contato das fases na célula de periodicidade. Procuramos a solução do problema Eq. (1)-(4) na forma da assintótica truncada

$$u \approx u^{(0)}(x) + \alpha u^{(1)}(x, \xi) + \alpha^2 u^{(2)}(x, \xi) \equiv u^{[2]}, \quad (5)$$

onde  $u^{(0)}(x)$ ,  $u^{(1)}(x, \xi)$  e  $u^{(2)}(x, \xi)$  são funções continuamente diferenciáveis, em relação à  $x$ , e 1-periódicas em relação a  $\xi$ .

Agora tomamos os dois primeiros termos da série de Taylor da tensão  $\tau(\varepsilon, \xi)$  na vizinhança do ponto  $(u_x^{(0)} + u_\xi^{(1)}, \xi)$ , isto é:

$$\tau(\varepsilon, \xi) \approx \tau(u_x^{(0)} + u_\xi^{(1)}, \xi) + \tau_\varepsilon(u_x^{(0)} + u_\xi^{(1)}, \xi) \left[ \varepsilon - (u_x^{(0)} + u_\xi^{(1)}) \right], \quad (6)$$

onde  $\varepsilon^\alpha = u_x^\alpha$  é o gradiente de temperatura. Logo, substituindo Eq. (5) em Eq. (6), levando em conta a regra da cadeia  $[A(x, \xi)]_x = A_x + \alpha^{-1} A_\xi$ , segue que

$$\tau([u^{[2]}]_x, \xi) \approx \tau(u_x^{(0)} + u_\xi^{(1)}, \xi) + \alpha(u_x^{(1)} + u_\xi^{(2)}) \tau_\varepsilon(u_x^{(0)} + u_\xi^{(1)}, \xi) + O(\alpha^2). \quad (7)$$

Agora, substituindo Eq. (7) na equação de equilíbrio Eq. (2) temos a igualdade assintótica

$$\alpha^{-1} \left[ \tau(u_x^{(0)} + u_\xi^{(1)}, \xi) \right]_\xi + \alpha^0 \left\{ \left[ \tau(u_x^{(0)} + u_\xi^{(1)}, \xi) \right]_x + \left[ (u_x^{(1)} + u_\xi^{(2)}) \tau_\varepsilon(u_x^{(0)} + u_\xi^{(1)}, \xi) \right]_\xi - f \right\} + O(\alpha) = 0, \quad \xi \neq c_1, \quad (8)$$

donde obtemos que

$$\left[ \tau(u_x^{(0)} + u_\xi^{(1)}, \xi) \right]_\xi = 0, \quad \xi \in (0, 1) \setminus \{c_1\}, \quad (9)$$

e

$$\left[ \left( u_x^{(1)} + u_\xi^{(2)} \right) \tau_\varepsilon \left( u_x^{(0)} + u_\xi^{(1)}, \xi \right) \right]_\xi = - \left[ \tau \left( u_x^{(0)} + u_\xi^{(1)}, \xi \right) \right]_x + f, \quad \xi \in (0,1) \setminus \{c_1\}. \quad (10)$$

Por outro lado, substituindo Eq. (7) na condição de continuidade em Eq. (3) segue que

$$\left[ \tau \left( u_x^{(0)} + u_\xi^{(1)}, \xi \right) \right]_{\xi=c_1} = 0 \quad (11)$$

e

$$\left[ \left( u_x^{(1)} + u_\xi^{(2)} \right) \tau_\varepsilon \left( u_x^{(0)} + u_\xi^{(1)}, \xi \right) \right]_{\xi=c_1} = 0. \quad (12)$$

Analogamente, substituindo Eq. (5) na condição de contato imperfeito Eq. (4) segue que

$$\tau_1 \left( u_x^{(0)} + u_\xi^{(1)} \right) \Big|_{\xi=c_1} = \beta \left[ u^{(1)} \right]_{\xi=c_1} \quad (13)$$

e

$$u_{\xi=c_1}^{(2)} = 0. \quad (14)$$

Dado  $u^{(0)}$ , Eqs. (9), (11) e (13) definem o chamado problema local para obter  $u^{(1)}$  em termos de  $u^{(0)}$ . Similarmente, dados  $u^{(0)}$  e  $u^{(1)}$ , Eqs. (10), (12) e (14) definem o problema para obter  $u^{(2)}$  em termos de  $u^{(0)}$  e  $u^{(1)}$ . A condição necessária e suficiente para a existência e unicidade de  $u^{(1)}$  e  $u^{(2)}$  soluções 1-periódicas dos problemas acima definidos é que o valor médio sobre a célula periódica dos lados direitos de Eq. (9) e Eq. (10) seja nulo (BAKHVALOV & PANASENKO, 1989), donde segue a equação homogeneizada para  $u^{(0)}$ :

$$\tau_x^e \left( u_x^{(0)} \right) = f, \quad (15)$$

onde  $\bar{\tau} = \tau^e(\bar{\varepsilon})$  é a lei efetiva da barra que relaciona o fluxo de calor médio  $\bar{\tau} = \langle \tau \rangle$  e o gradiente de temperatura médio  $\bar{\varepsilon} = \langle u_x^{(0)} \rangle = u_x^{(0)}$  e é dada por

$$\tau^e(\bar{\varepsilon}) = \left\langle \tau \left( \bar{\varepsilon} + N_\xi(\bar{\varepsilon}, \xi), \xi \right) \right\rangle \quad (16)$$

onde  $\langle A(\xi) \rangle = \int_0^1 A(\xi) d\xi$  é o operador de valor médio e  $N(\bar{\varepsilon}, \xi)$  é a solução do problema local para cada  $\bar{\varepsilon} = u_x^{(0)}$  dado.

### 2.2.1. Algoritmo para obter a lei efetiva

Seja  $N(\bar{\varepsilon}, \xi)$  a solução do problema local. Então de Eq. (9) segue que  $\tau(\bar{\varepsilon} + N_\xi(\bar{\varepsilon}, \xi), \xi)$  não depende de  $\xi$ , ou seja,

$$\tau(\bar{\varepsilon} + N_{\xi}(\bar{\varepsilon}, \xi), \xi) = \bar{\tau}. \quad (17)$$

De calcular a inversa com relação ao primeiro argumento na Eq. (17) e aplicar o operador de valor médio levando em conta a condição em Eq. (13), segue que

$$\bar{\varepsilon} + \frac{\bar{\tau}}{\beta} = \langle \tau^{-1}(\bar{\tau}, \xi) \rangle, \quad (18)$$

donde a lei efetiva  $\bar{\tau} = \tau^e(\bar{\varepsilon})$  segue de resolver Eq. (18) com relação a  $\bar{\tau}$ .

### 3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

No primeiro caso considerado, tem-se a seguinte relação constitutiva para o fluxo de calor  $\tau$ :

$$\tau(\bar{\varepsilon} + [N(\bar{\varepsilon}, \xi)]_{\xi}, \xi) = 1_1(\xi)a_1(\bar{\varepsilon} + [N(\bar{\varepsilon}, \xi)]_{\xi}) + 1_2(\xi)a_2\sqrt{\bar{\varepsilon} + [N(\bar{\varepsilon}, \xi)]_{\xi}}, \quad (19)$$

onde  $a_1$  e  $a_2$  são as condutividades térmicas dos materiais constituintes. Aplicando à relação acima o algoritmo descrito, obtém-se a expressão para a lei efetiva, normalizada por  $a_1$ :

$$\frac{\tau^e(\bar{\varepsilon})}{a_1} = \frac{\lambda}{2} \left( \sqrt{\left( \frac{c_1}{c_2} + \frac{1}{Bi} \right)^2 \lambda^2 + \frac{4\bar{\varepsilon}}{c_2}} - \left( \frac{c_1}{c_2} + \frac{1}{Bi} \right) \lambda \right), \quad (20)$$

onde  $c_2 = 1 - c_1$  é a concentração do constituinte não linear,  $\lambda = \frac{a_2}{a_1}$  e  $Bi = \beta \frac{c_2}{c_1}$  é o

Número de Biot.

A Fig. 1 apresenta a variação desta lei efetiva com relação ao número de Biot. Os casos extremos são:  $Bi \rightarrow 0$  ( $\beta \rightarrow 0$ ) e  $Bi \rightarrow \infty$  ( $\beta \rightarrow \infty$ ). O significado físico do primeiro caso, analisando junto à condição em Eq. (4), pode ser visto como a presença de um isolante térmico perfeito entre as duas fases, dado que a descontinuidade  $N_{\xi=\eta_1}$  tende a  $\infty$  neste caso. Este isolamento pode ser devido à presença de algum isolante térmico entre as fases como também à ruptura do material, o que também impediria o fluxo térmico na barra. Este comportamento é observado no gráfico, quando a lei efetiva determinada tende a 0 juntamente com  $Bi$ , uma vez que não há mais fluxo de calor entre as barras devido a tal isolante. Já no caso em que  $Bi \rightarrow \infty$ , de acordo com a condição de contato dada no problema local, tem-se que a descontinuidade na interface tende a 0, o que fisicamente significa que o calor flui perfeitamente entre as fases, ou seja, não há barreira térmica nesse ponto.

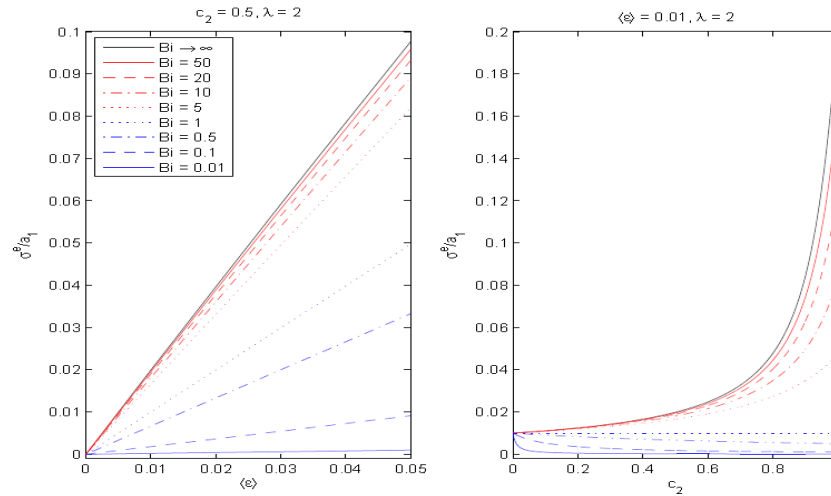


Figura 1 - Avaliação da lei efetiva obtida para diferentes valores de  $Bi$ ,  $\lambda$ ,  $\bar{\varepsilon}$  ( $=\langle \varepsilon \rangle$ ) e  $c_2$ .

A lei efetiva obtida analiticamente quando  $Bi \rightarrow \infty$ , é expressa na equação abaixo:

$$\frac{\tau^e(\bar{\varepsilon})}{a_1} = \frac{\lambda}{2} \left( \sqrt{\left( \frac{c_1}{c_2} \right)^2 \lambda^2 + \frac{4\bar{\varepsilon}}{c_2}} - \frac{c_1}{c_2} \lambda \right) \quad (21)$$

Nas Fig. 2, 3 e 4, é analisado o comportamento da lei na Eq. (21) frente às três variáveis do problema:  $\lambda$ ,  $\langle \varepsilon \rangle$  e  $c_2$ . Na Fig. 2, observa-se que a medida que aumenta-se a concentração do material não linear no compósito, a lei efetiva se aproxima da lei do material 2, e vice-versa, o que reforça a validade da equação obtida através do algoritmo. Além disso, para valores diferentes de  $\lambda$  tal comportamento se mantém.

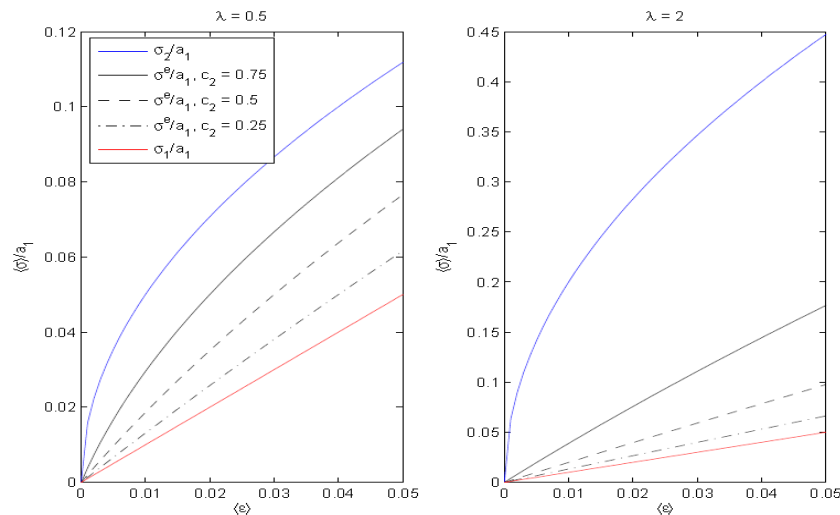


Figura 2 - Lei efetiva em função de  $\bar{\varepsilon}$  ( $=\langle \varepsilon \rangle$ ) para diferentes valores de  $\lambda$  e  $c_2$ .

Na Fig. 3 observa-se novamente que aumentando a quantidade do material 2 na barra, a lei efetiva tende à do mesmo material, e a recíproca também ocorre. É visto também que a velocidade de variação da lei efetiva aumenta para valores maiores de  $\lambda$ .

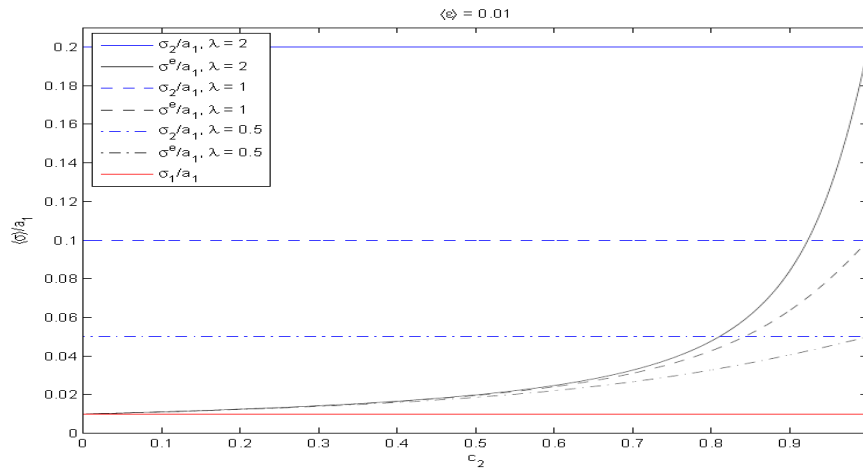


Figura 3 - Lei efetiva em função de  $c_2$  para  $\bar{\varepsilon} (= \langle \varepsilon \rangle)$  fixo e diferentes valores de  $\lambda$ .

Finalmente, da Fig. 4, tem-se que a lei efetiva cresce à medida que a razão  $\lambda$  cresce. Observa-se também um ponto de inversão das propriedades dos dois materiais para  $\lambda = 0,1$ , o que, devido às definições de  $\tau_1$  e  $\tau_2$ , ocorrerá sempre nos pontos em que  $\lambda = \sqrt{\bar{\varepsilon}}$ . No gráfico da direita é enfatizado o fato de que a tendência de  $\frac{\tau^e(\bar{\varepsilon})}{a_1}$  segue sendo para a propriedade do material cuja concentração está aumentando.

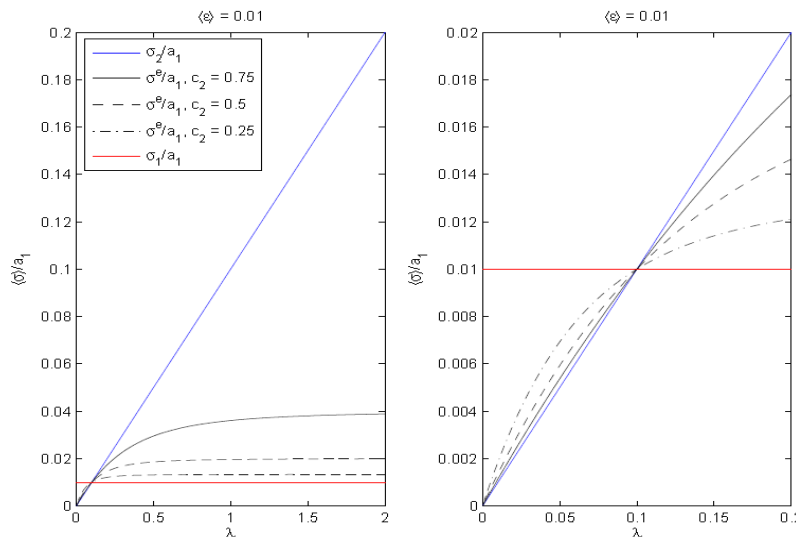


Figura 4 - Lei efetiva em função de  $\lambda$  para  $\bar{\varepsilon} (= \langle \varepsilon \rangle)$  fixo e diferentes valores de  $c_2$ .

#### 4. CONCLUSÕES

A lei efetiva para a condução do calor da barra bifásica periódica não linear foi obtida com sucesso via MHA, e pode ser avaliada sob o ponto de vista de cada parâmetro envolvido no problema, considerando as condições de barreira térmica entre as fases da barra. Além



disso, nessa avaliação, foi observada a validade da lei obtida através de determinadas características dos gráficos gerados para tal estudo.

Diante disso, conclui-se que o estudo das propriedades dos materiais não lineares deve prosseguir, dada a escassez de trabalhos acerca do assunto e o sucesso na aplicação do MHA realizada neste trabalho. Além disso, deve ser continuado considerando mais características do material que tornem o modelo matemático obtido cada vez mais exato.

### ***Agradecimentos***

Agradecemos o apoio do projeto CAPES nº 88881.030424/2013-01 intitulado "Desenvolvimento e Aplicações de Métodos Matemáticos de Homogeneização".

### **REFERÊNCIAS**

ASKELAND, D. R., PHULÉ, P. P. **Ciência e Engenharia dos Materiais**. São Paulo: Cengage Learning, 2008.

BAKHVALOV, N. S.; PANASENKO, G. P., **Homogenisation: Averaging Processes in Periodic Media**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1989.

COURTNEY, T. H. **Mechanical Behavior of Materials**. Illinois: Waveland Press, 2005.

FERRANTE, M. **Seleção de materiais**. São Carlos: UFScar, 2009.

LAZZARI, L.; FERNANDEZ, L. dos S.; LIMA, M. P. de; FERNÁNDEZ, L. D. P.; CASTILLERO, J. B. Homogeneização Assintótica da equação unidimensional do calor. In: **ENCONTRO DE PÓS-GRADUAÇÃO UFPEL**, 16. Pelotas, 2014. Anais do XVI ENPOS. Pelotas: UFPel, 2014. p. 4.

LEVY NETO, F.; PARDINI, L. C. **Compósitos Estruturais: Ciência e Tecnologia**. São Paulo: Blucher, 2006.

SHACKELFORD, J. F. **Introduction to materials science for engineers**. New Jersey: Pearson, 2009.